Antomari

Cours de mécanique

Feuille 532 bis.

529	530	531
532	532 bis	—
—	—	—

5° 4′

5° 8′

45° 56′

Gl. d'Otemna
Gl. de Crête sèche
Bec d'Epicoun
Gran Epicoun
La Rajette
Bec de Gardonnet
M. Cervo
V. Sassa
C. Boetta
La Grotta
Bca. Chatelnin
3370
2560
3537
3356
3393
3430
2260
3208
3285

COURS DE MÉCANIQUE

Alexandre Zivek

COURS

DE

MÉCANIQUE

A L'USAGE

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE DE SAINT-CYR

PAR

X. ANTOMARI

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE
AGRÉGÉ DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, DOCTEUR ÈS SCIENCES
DIRECTEUR DES ÉTUDES
ET PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES A L'ÉCOLE MONGE

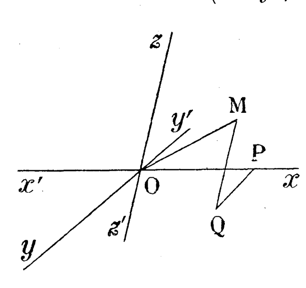
PARIS
LIBRAIRIE NONY & Cie
17, RUE DES ÉCOLES, 17

1895

PRÉLIMINAIRES

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS

1. **Coordonnées d'un point.** — On définit la position d'un point, en géométrie à trois dimensions, au moyen de ses coordonnées. Considérons un trièdre $(O.xyz)$ de sommet O, et, sur chacune des arêtes de ce trièdre, fixons un sens positif et un sens négatif; soient Ox, Oy, Oz les sens positifs fixés respectivement sur les trois arêtes. On appelle *coordonnées cartésiennes* ou tout simplement *coordonnées* du point M *rapporté* aux trois axes Ox, Oy et Oz, les projections du segment OM sur chacun des axes, parallèlement au plan des deux autres.



La projection sur l'axe $x'x$ s'appelle l'*abscisse* et se désigne par la lettre x ; la projection sur l'axe yy' s'appelle l'*ordonnée* et se désigne par la lettre y ; enfin la projection sur l'axe $z'z$ s'appelle la *cote* et se désigne par la lettre z ; de là les noms d'axes des x, des y et des z donnés aux trois arêtes du trièdre.

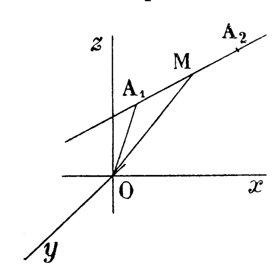
Le point O, sommet du trièdre, s'appelle l'*origine* des coordonnées, et l'on dit que celles-ci sont *rectangulaires* ou *obliques* suivant que le trièdre est trirectangle ou non.

Il est clair qu'à tout point M de l'espace rapporté à un trièdre $(O.xyz)$ il correspond un système de trois coordonnées x, y, z. Inversement, si l'on connaît les coordonnées d'un point M par rapport à trois axes formant un trièdre, la position du point dans l'espace est bien définie, car on connaît les projections du point sur trois droites et, par suite, le point est à l'intersection de trois plans qui se coupent toujours, parce qu'ils sont respectivement parallèles aux trois faces d'un trièdre.



Si l'on mène par le point M la parallèle MQ à l'axe des z, jusqu'au point Q où cette droite rencontre le plan xOy, puis la parallèle QP à l'axe des y, on obtient une ligne polygonale OPQM qu'on appelle le *contour des coordonnées* du point M.

2. **Coordonnées du point qui partage un segment dans un rapport donné.** — Considérons un segment A_1A_2 défini par les coordonnées x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 des points A_1, A_2. La position de tout point M de la droite indéfinie A_1A_2 est complètement définie si l'on connaît, en grandeur et en signe, la valeur λ du rapport $\frac{A_1M}{MA_2}$, ce rapport étant conventionnellement positif si le point M est situé entre A_1 et A_2, négatif dans le cas contraire, l'ordre des lettres au numérateur et au dénominateur devant d'ailleurs être respecté.



Cela posé, proposons-nous de calculer les coordonnées x, y, z du point M en fonction de λ et des coordonnées des points A_1 et A_2. Pour cela, remarquons que si l'on projette sur un axe quelconque, on a évidemment en grandeur et en signe

$$\frac{\text{pr. } A_1M}{\text{pr. } MA_2} = \frac{A_1M}{MA_2};$$

par suite,

$$(1) \qquad \frac{\text{pr. } A_1M}{\text{pr. } MA_2} = \lambda.$$

Projetons d'abord sur l'axe des x, parallèlement au plan yOz; on a

$$\text{pr. } A_1M = \text{pr. } A_1O + \text{pr. } OM;$$

mais, par définition,

$$\text{pr. } A_1O = -\text{pr. } OA_1 = -x_1,$$

$$\text{pr. } OM = x;$$

donc $$\text{pr. } A_1M = x - x_1.$$

On a de même $$\text{pr. } MA_2 = x_2 - x,$$

et, par suite, en vertu de (1),

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

On tire de là $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

et l'on trouverait de même, en projetant sur les deux autres axes,

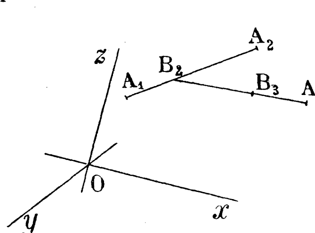
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Ces formules résolvent le problème et, si $\lambda = \frac{a_2}{a_1}$, elles deviennent

$$(2) \quad x = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2}, \quad y = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}, \quad z = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2}{a_1 + a_2}.$$

3. **Centre des distances proportionnelles d'un système de points.** — Considérons un système de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, défini par les coordonnées x_i, y_i, z_i de l'un quelconque de ses points, A_i.



Supposons ces points affectés des coefficients respectifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, positifs ou négatifs, et construisons le point B_2 situé sur A_1A_2 et tel que l'on ait

$$\frac{A_1B_2}{B_2A_2} = \frac{a_2}{a_1},$$

puis affectons ce point du coefficient $a_1 + a_2 = b_2$. Construisons ensuite le point B_3 situé sur B_2A_3 et tel que l'on ait

$$\frac{B_2B_3}{B_3A_3} = \frac{a_3}{b_2},$$

puis affectons ce point du coefficient $b_2 + a_3 = b_3$, et ainsi de suite. Nous obtiendrons finalement un point B_n qu'on appelle le *centre des distances proportionnelles* du système de points considérés.

Proposons-nous de calculer les coordonnées x, y, z du point B_n, connaissant celles des points donnés. Appelons pour cela ξ_2, η_2, ζ_2 les coordonnées du point B_2, ξ_3, η_3, ζ_3 celles du point B_3, etc., ξ_n, η_n, ζ_n celles du point B_n, de sorte que ξ_n, η_n, ζ_n sont respectivement identiques à x, y, z. En vertu des formules (2) du numéro précédent, on a

$$\xi_2 = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2},$$

formule qu'on peut écrire

$$(3) \qquad b_2\xi_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

On a de même successivement

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_3\xi_3 = b_2\xi_2 + a_3 x_3, \\ b_4\xi_4 = b_3\xi_3 + a_4 x_4, \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ b_n\xi_n = b_{n-1}\xi_{n-1} + a_n x_n. \end{array} \right.$$

En additionnant membre à membre les formules (3) et (4) et en réduisant, il vient

$$b_n\xi_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Or, par définition, $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ et $\xi_n = x$; si donc $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ est différent de zéro, on aura

$$x = \frac{\Sigma a_i x_i}{\Sigma a_i},$$

et, par analogie,

$$y = \frac{\Sigma a_i y_i}{\Sigma a_i},$$

$$z = \frac{\Sigma a_i z_i}{\Sigma a_i}.$$

Lorsqu'on a en particulier $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, ces formules deviennent

$$x = \frac{\Sigma x_i}{n}, \qquad y = \frac{\Sigma y_i}{n}, \qquad z = \frac{\Sigma z_i}{n},$$

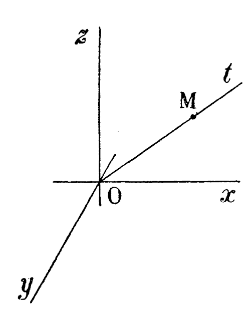
et le point B_n prend le nom de *centre des moyennes distances.*

4. **Propriétés du centre des distances proportionnelles.** — Le simple examen des expressions des coordonnées du centre des distances proportionnelles met en évidence les propriétés suivantes de ce point :

1° Pour obtenir le centre des distances proportionnelles d'un système de points, au lieu d'associer les points dans l'ordre $A_1, A_2, \ldots, A_n$, on peut les associer dans n'importe quel ordre;

2° Le centre des distances proportionnelles d'un système de points ne change pas quand on fait varier les coefficients de manière à conserver leurs rapports mutuels, c'est-à-dire si les coefficients, au lieu d'être égaux respectivement à $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sont égaux respectivement à $ka_1, ka_2, \ldots, ka_n$, k désignant un facteur arbitraire.

5. **Détermination d'une direction.** — Pour déterminer une direction de l'espace, on mène par l'origine la demi-droite Ot parallèle à cette direction et sur cette demi-droite on prend un point M à une distance non nulle de l'origine ; la direction est complètement définie quand on connaît ce point, par suite quand on donne les coordonnées a, b, c du point M. Pour cette raison le point M est appelé le *point directeur* de la direction, dont a, b, c sont les *paramètres directeurs*.



Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, si l'on appelle α, β, γ les angles que la direction fait avec les axes respectifs Ox, Oy, Oz, et si OM est égale à 1,

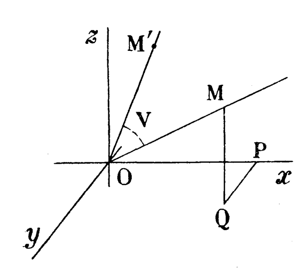
la théorie des projections ou, si l'on veut, la définition du cosinus d'un angle donne

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \cos\beta, \qquad c = \cos\gamma.$$

Les paramètres directeurs a, b, c s'appellent alors les *cosinus directeurs* de la direction OM.

6. **Théorème.** — *Lorsque les coordonnées sont rectangulaires, la somme des carrés des cosinus directeurs d'une direction est égale à l'unité.*

Construisons en effet le contour OPQM des coordonnées du point M et projetons orthogonalement ce contour, ainsi que la diagonale OM, successisement sur les axes et sur la direction OM. En projetant d'abord sur les axes, on obtient



$$a = \cos\alpha, \quad b = \cos\beta, \quad c = \cos\gamma,$$

puisque, par hypothèse, $OM = 1$; en projetant ensuite sur OM, on obtient

$$a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma = 1,$$

c'est-à-dire
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

7. **Angle de deux directions en coordonnées rectangulaires.** — Considérons une deuxième direction OM', faisant l'angle V avec la première et les angles α, β, γ avec les axes. Supposons encore $OM = 1$ et projetons orthogonalement le contour OPQM et la diagonale OM sur l'axe OM'; il vient ainsi

$$\cos V = a \cos\alpha' + b \cos\beta' + c \cos\gamma',$$

et, en remplaçant a, b, c par leurs valeurs trouvées plus haut, on obtient

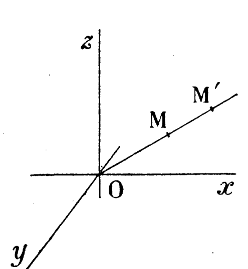
$$\cos V = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$

8. **Conditions d'orthogonalité.** — D'après cela, quand les axes sont rectangulaires, la condition d'orthogonalité des deux directions OM et OM' est

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0.$$

9. **Conditions de parallélisme de deux directions** (axes quelconques). — Pour que deux directions soient parallèles, il faut et il suffit que les parallèles à ces deux directions menées par l'origine soient confondues ; par suite, il faut et il suffit que leurs points directeurs soient en ligne droite avec l'origine. Si donc M et M' sont les deux points directeurs de deux directions paral-

lèles, en projetant sur un axe quelconque on a



$$\frac{\text{pr. OM}}{\text{pr. OM}'} = \frac{\text{OM}}{\text{OM}'}.$$

Appelons alors a, b, c les coordonnées du point M, a', b', c' celles du point M′. En projetant d'abord sur Ox, parallèlement au plan yOz, on a

$$\frac{\text{OM}}{\text{OM}'} = \frac{a}{a'};$$

on aurait de même

$$\frac{\text{OM}}{\text{OM}'} = \frac{b}{b'} \quad \text{et} \quad \frac{\text{OM}}{\text{OM}'} = \frac{c}{c'}.$$

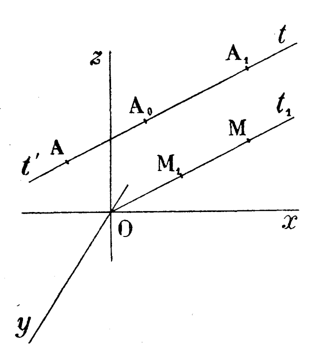
On en déduit

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Ainsi, *pour que deux directions soient parallèles, il faut que leurs paramètres directeurs soient proportionnels.*

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, car, si on les suppose remplies et si l'on appelle k la valeur commune des trois rapports, le point M_1 de la droite OM′ défini par l'égalité $\frac{\text{OM}_1}{\text{OM}'} = k$ a pour coordonnées, d'après le calcul précédent, ka', kb', kc', et, par suite, coïncide avec le point M. Les points directeurs de deux directions étant en ligne droite avec l'origine, les deux directions sont parallèles.

10. **Relations entre les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne droite** (axes quelconques). — Considérons une droite indéfinie tt' et fixons sur cette droite un sens de parcours, de manière à déterminer une direction; menons par l'origine la demi-droite Ot_1 parallèle à cette direction, appelons a, b, c ses paramètres directeurs, M le point de cette demi-droite dont les coordonnées sont a, b, c, c'est-à-dire le point directeur; prenons enfin sur la droite tt' un point A_0, de coordonnées x_0, y_0 z_0. Quand on se donne x_0, y_0, z_0 et a, b, c, il est clair que l'on définit non seulement la position de la droite tt', mais encore le sens adopté comme sens positif de parcours sur cette droite. Proposons-nous alors, au moyen de ces données, de trouver les relations qui lient les coordonnées x, y, z d'un



point quelconque, A, de tt'. Pour cela, observons d'abord que la position de A sur tt' est complètement définie par le segment algébrique A_0A, que nous désignerons par la lettre ρ et que nous prendrons comme inconnue auxiliaire; prenons ensuite sur la demi-droite Ot_1, le point M tel que $OM = 1$ et sur la demi-droite A_0t le point A_1 tel que $A_0A_1 = 1$.

En projetant sur n'importe quel axe, on a évidemment

$$\frac{\text{pr. } A_0A}{\text{pr. } A_0A_1} = \frac{A_0A}{A_0A_1},$$

$$\frac{\text{pr. OM}}{\text{pr. } OM_1} = \frac{OM}{OM_1};$$

d'où il résulte, en divisant membre à membre et en remarquant que $OM_1 = A_0A_1 = 1$,

$$\frac{\text{pr. } A_0A}{\text{pr. OM}} = \frac{A_0A}{OM}.$$

Mais on a posé $A_0A = \rho$; si donc on désigne par l la distance OM, il vient

$$\frac{\text{pr. } A_0A}{\text{pr. OM}} = \frac{\rho}{l}.$$

Projetons alors successivement sur chacun des trois axes, parallèlement au plan des deux autres, et nous aurons : sur l'axe des x

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{\rho}{l};$$

car pr. $A_0A = x - x_0$ et pr. $OM = a$;
pareillement sur l'axe des y,

$$\frac{y - y_0}{b} = \frac{\rho}{l},$$

et sur l'axe des z,

$$\frac{z - z_0}{c} = \frac{\rho}{l}.$$

Pour avoir les relations cherchées, il ne nous reste plus qu'à éliminer $\frac{\rho}{l}$ entre ces trois équations, ce qui donne

$$(1) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Réciproquement, tout point dont les coordonnées x', y', z' satisfont à ces équations est un point de la droite tt'. Appelons en effet $\frac{r}{l}$ la valeur commune des rapports (1) quand on y a remplacé x, y, z respectivement par x', y', z'; on aura

$$(2) \qquad \frac{x' - x_0}{a} = \frac{y' - y_0}{b} = \frac{z' - z_0}{c} = \frac{r}{l}.$$

Prenons sur la droite tt' le point A' tel que segment algébri-

que $A_0A' = r$, et calculons ses coordonnées ξ', η', ζ' en procédant comme pour établir les relations (1); nous aurons

$$\frac{\xi' - x_0}{a} = \frac{\eta' - y_0}{b} = \frac{\zeta' - z_0}{c} = \frac{r}{l}.$$

La comparaison avec les équations (2) montre tout de suite que $\xi' = x'$, $\eta' = y'$, $\zeta' = z'$ et, par suite, que le point de coordonnées x', y', z' est bien sur tt', puisqu'il coïncide avec A'.

Les équations (1) caractérisent donc la droite tt', et on les appelle, pour cette raison, les *équations de la ligne droite;* on dit aussi qu'elles *représentent* une ligne droite. Le point M dont les coordonnées sont a, b, c s'appelle encore le point directeur, et a, b, c sont toujours les paramètres directeurs.

11. **Cas particuliers.** — Si la droite tt' est parallèle à l'un des axes, les équations se simplifient. Par exemple, si la droite tt' est parallèle à Oz, Ot_1 est confondue avec Oz, a et b sont nuls et les équations (1) exigent, pour être satisfaites, que l'on ait

$$x = x_0, \qquad y = y_0.$$

Si de plus tt' coïncide avec Oz, on a $x_0 = y_0 = 0$, et ces équations deviennent

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

12. Remarque. — Considérons deux équations du premier degré de la forme

$$\text{(3)} \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\text{(4)} \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

dans lesquelles A, B, ..., A', B', ... sont des quantités connues et x, y, z les coordonnées d'un point mobile; il est facile de voir que ces équations définissent une ligne droite, ce qui veut dire que le lieu géométrique d'un point mobile dont les coordonnées sont assujetties à vérifier constamment ces équations, est une ligne droite, pourvu toutefois que les trois binomes $BC' - CB'$, $CA' - AC'$ et $AB' - BA'$ ne soient pas nuls simultanément.

Supposons en effet $AB' - BA' \neq 0$, donnons à z une valeur particulière z_0 et appelons x_0, y_0 les valeurs correspondantes de x et de y tirées de ces équations; d'après la manière même dont ces quantités ont été calculées, on aura

$$\text{(5)} \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

$$\text{(6)} \qquad A'x_0 + B'y_0 + C'z_0 + D' = 0.$$

Retranchant alors (5) de (3) et (6) de (4); il vient

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

$$A'(x - x_0) + B'(y - y_0) + C'(z - z_0) = 0;$$

enfin, de ces équations résolues par rapport à $x - x_0$ et $y - y_0$, on déduit les nouvelles équations

$$\frac{x - x_0}{BC' - CB'} = \frac{y - y_0}{CA' - AC'} = \frac{z - z_0}{AB' - BA'},$$

qui définissent évidemment une droite menée par le point dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0, parallèlement à la direction qui a pour paramètres directeurs

$$BC' - CB', \qquad CA' - AC', \qquad AB' - BA'.$$

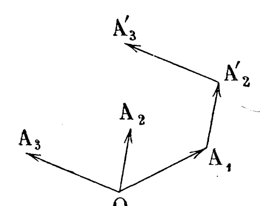
13. **Parallélisme de deux droites.** — Les conditions de parallélisme de deux droites sont évidemment les mêmes que celles de deux directions : il faut et il suffit que les paramètres directeurs soient proportionnels.

14. **Définition d'un vecteur.** — Un *vecteur* est un segment de droite AB, ayant une *origine* A, une *extrémité* B, et un sens, celui de A vers B, c'est-à-dire de l'origine vers l'extrémité.

15. **Vecteurs égaux.** — Deux vecteurs parallèles de même longueur et de même sens sont *égaux*, par définition, quelle que soit leur position dans l'espace.

Deux vecteurs parallèles de même longueur et de sens opposés, sont *égaux et opposés*.

16. **Somme géométrique de vecteurs.** — Considérons plusieurs vecteurs distribués d'une manière quelconque dans l'espace, et soient OA_1, OA_2, $OA_3, \ldots$, OA_n les vecteurs respectivement égaux menés par le même point O. On appelle *somme géométrique* des vecteurs considérés la diagonale OA'_n de la ligne polygonale $OA_1A'_2 \ldots A'_n$ dont les côtés autres que OA_1 sont :



le vecteur $A_1A'_2$ égal à OA_2 ;

le vecteur $A'_2A'_3$ égal à OA_3, etc.

Quand il n'y a que deux vecteurs, leur somme géométrique est la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs ramenés à la même origine ; quand il n'y en a que trois non parallèles au même plan, c'est la diagonale du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs ramenés encore à la même origine.

Enfin, quand tous les vecteurs sont parallèles, leur somme géométrique coïncide avec une somme ordinaire.

17. Remarques. — 1° Quand le point O se déplace dans l'espace,

la ligne polygonale $OA_1A'_2 \ldots A'_n$ se déplace parallèlement à elle-même; donc la somme géométrique ne change pas.

2° Il est clair que la projection sur un plan d'une somme géométrique de vecteurs est la somme géométrique des projections de ces vecteurs; il n'y a qu'à faire une figure pour s'en assurer.

3° En vertu du théorème des projections, la projection sur un axe, d'une somme géométrique de vecteurs, est égale à la somme algébrique des projections de ces vecteurs sur cet axe.

INTRODUCTION

18. **Point matériel.** — On appelle *point matériel* un point géométrique en lequel on suppose condensée de la matière obéissant aux lois habituelles de la nature. Nous considérerons les corps comme des assemblages de points matériels.

19. **Mouvement et repos.** — On dit qu'un corps est en *mouvement* quand il change de position par rapport à des points fixes ou supposés fixes ; il est dit au *repos* dans le cas contraire.

Un point en mouvement sera appelé un *mobile*.

On appelle *trajectoire* d'un mobile le lieu géométrique de ses positions successives.

20. **Principe de l'inertie ; forces.** — Une observation journalière nous apprend qu'un corps au repos y reste indéfiniment si aucune cause extérieure n'intervient pour l'en tirer ; plus généralement, nous *admettrons*, comme un principe régissant la matière (principe de l'inertie), que l'état de repos ou de mouvement des corps ne peut être modifié sans l'intervention de certaines causes extérieures qu'on appelle des *forces*.

L'existence des forces n'a rien d'hypothétique ; elle nous est révélée par une expérience de tous les instants ; c'est ainsi que nous avons le sentiment d'un effort à exercer soit pour soulever un fardeau, soit pour soutenir un corps que nous avons à la main et l'empêcher de tomber. Dans le premier cas, l'intervention d'une cause extérieure met le corps en mouvement ; dans le second cas, elle modifie le mouve-

ment que prend, sous l'action de son poids, tout corps abandonné à lui-même à la surface de la terre.

Il peut arriver toutefois que l'action d'une force sur un corps ne modifie pas, du moins en apparence, son état de repos ou de mouvement : c'est ainsi, par exemple, que l'on peut exercer un effort sur un fardeau sans parvenir à le soulever.

D'après cela, nous appellerons *force* toute cause qui *modifie* ou *qui tend à modifier* l'état de repos ou de mouvement des corps.

Ajoutons que les forces paraissent très diverses par leur nature : effort musculaire, pesanteur, force électrique, etc.

21. **Objet et divisions de la mécanique**. — La *mécanique* a pour objet l'étude du mouvement et des forces qui le produisent. Pour cette étude, il n'est pas nécessaire de connaître la nature intime des forces ; il suffit qu'on puisse les comparer entre elles, c'est-à-dire les *mesurer*. Nous verrons plus loin comment on y parvient.

On divise la mécanique en deux parties : la *cinématique*, où l'on s'occupe du mouvement en faisant abstraction des forces qui le produisent, et la *dynamique*, où l'on s'occupe du mouvement et des forces.

Comme cas particulier de la dynamique, on étudie celui où le corps reste au repos sous l'action des forces qui agissent sur lui ; la partie de la mécanique qui s'occupe de ce cas particulier, d'ailleurs très important, porte le nom de *statique*.

Pour nous conformer au programme, nous commencerons l'étude de la mécanique par celle de la statique.

LIVRE PREMIER

STATIQUE

CHAPITRE PREMIER

PREMIÈRES NOTIONS SUR LES FORCES ; DYNAMOMÈTRES

22. **Direction d'une force ; point d'application.** — Supposons qu'à un instant donné un point matériel M, primitivement au repos, se mette en mouvement ; nous pouvons dire, en vertu du principe de l'inertie, qu'une force agit sur lui, et nous dirons aussi que cette force est *appliquée* au point M.



Au début de son mouvement, le point se déplace dans une certaine direction tangente en M à la trajectoire qu'il décrit : cette direction s'appelle la *direction* de la force. Par définition donc, la direction d'une force est la direction du déplacement qu'elle tend à imprimer à un point matériel partant du repos.

23. **Équilibre d'un système de forces.** — On dit qu'un système de forces, agissant sur un point matériel ou sur un corps, est en *équilibre*, quand l'état du point ou celui du corps, au point de vue du mouvement ou du repos, ne sont pas modifiés par l'introduction ou par la suppression de ce système de forces.

24. **Systèmes de forces équivalents.** — Il résulte immédiatement de cette définition que *si deux systèmes de forces,* P *et*

Q, *sont équilibrés par un troisième système*, R, *on peut les remplacer l'un par l'autre*.

Imaginons en effet que les forces du système P, par exemple, agissent seules sur un corps. L'état de ce corps, au point de vue du mouvement ou du repos, ne sera pas modifié par l'introduction des forces des deux systèmes Q et R qui constituent un système de forces en équilibre; mais pour la même raison, l'état du corps n'est pas modifié par la suppression des forces des systèmes P et R.

Il ne reste donc plus que le système Q qui peut remplacer le système P.

D'après cela, on dit que deux systèmes de forces sont *équivalents* quand ils peuvent être équilibrés par un même troisième.

25. Forces égales ; somme de deux ou de plusieurs forces. — Lorsque deux forces, F et F', agissant sur le même point matériel, dans la même direction et dans des sens opposés, se font équilibre, on dit qu'elles sont *égales et opposées*.

Deux forces F et F' sont dites *égales*, quand elles sont égales et opposées à une même troisième.

On dit qu'une force F est la *somme* de plusieurs autres $F_1, F_2, \ldots, F_n$, lorsque toutes ces forces, appliquées à la fois au même point que F, dans la même direction et dans le même sens, sont équilibrées par une force F' égale et opposée à F.

On exprime que F est la somme des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, en écrivant l'égalité symbolique

$$F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n.$$

26. Remarque. — La définition de la *différence* de deux forces est une conséquence de la définition de la somme de deux autres. On dit qu'une force R est la différence de deux autres, F et F', lorsqu'on a

$$F = R + F'.$$

Quand une force F est ainsi égale à la somme de deux autres

forces R et F′, on dit que F est plus grande que chacune des forces R et F′.

27. Mesure des forces. — Ces définitions suffisent pour effectuer la mesure des forces. On en déduit en effet la définition d'une force *multiple* ou *sous-multiple* d'une autre, ainsi que celle du rapport de deux forces. Voici du reste ces deux définitions :

1° On dit qu'une force F est multiple d'une autre f, lorsque F est la somme de plusieurs forces égales à f ; si elle est la somme de n forces f, on dit qu'elle est égale à nf et l'on écrit $F = nf$. Inversement, on dit que f est un *sous-multiple* de F et que l'on a

$$f = \frac{F}{n},$$

ce qui veut dire que f est la $n^{ième}$ *partie* de F, ou que f est *contenue* exactement n fois dans F.

2° Étant données deux forces F et F′, on appelle *commune mesure* à ces deux forces toute force f contenue un nombre exact de fois dans chacune d'elles. Deux forces quelconques, F et F′, peuvent ne pas avoir de commune mesure ; lorsqu'elles en ont une, f, tous les sous-multiples de f sont évidemment des communes mesures, de sorte qu'il y en a une infinité.

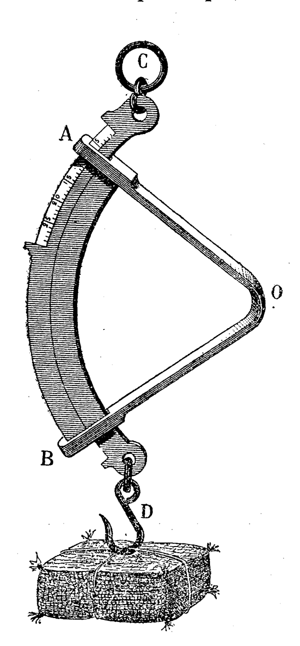
Quand deux forces F et F′ ont une commune mesure f, contenue par exemple p fois dans F et p' fois dans F′, le quotient $\frac{p}{p'}$ s'appelle le *rapport* de F à F′, et l'on dit que ce rapport est *commensurable*.

Par un procédé qui revient dans toutes les questions relatives à la mesure des grandeurs, on étend facilement la notion de *rapport* à deux forces qui n'ont pas de commune mesure ; seulement on dit, dans ce cas, que le rapport est *incommensurable*, et l'on se borne à le définir par ses *valeurs approchées*. Dans tous les cas on représente le rapport de la force F à la force F′ par le symbole $\frac{F}{F'}$.

Si l'on prend la force F′ comme unité, le rapport commensurable ou incommensurable $\frac{F}{F'}$ s'appelle la *mesure* de la force F.

28. **Intensité.** — On appelle *intensité* d'une force le nombre qui mesure cette force au moyen de l'unité choisie. La force généralement prise pour unité est le *kilogramme*, c'est-à-dire le *poids* (1), à Paris et dans le vide, d'un décimètre cube d'eau distillée à la température qui correspond au maximum de densité.

29. **Dynamomètres.** — La comparaison des forces aux poids se fait au moyen d'instruments qu'on appelle des *dynamomètres*. En principe, un dynamomètre est un ressort qui se déforme plus ou moins suivant que l'effort que l'on exerce sur lui est plus ou moins considérable. On admet du reste que les flexions du ressort sont égales pour des forces égales, ce qui permet d'obtenir l'intensité d'une force au moyen de la flexion.

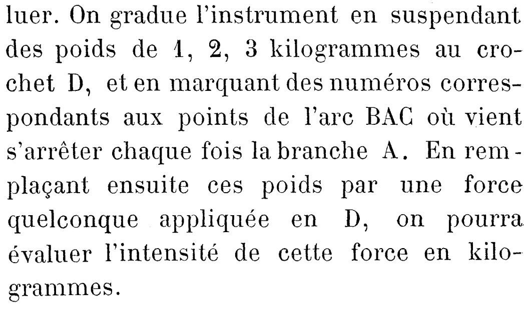


Les dynamomètres affectent des formes très variables ; nous allons décrire rapidement les plus simples.

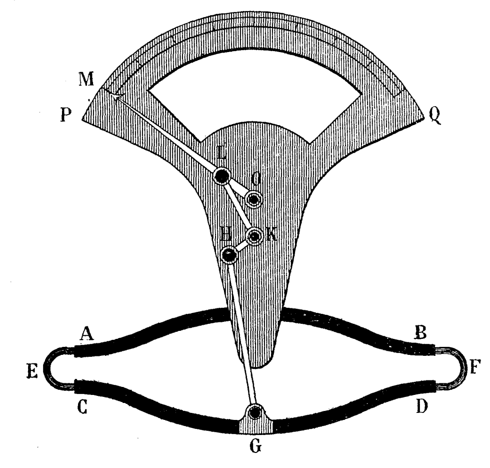
Peson à ressort. — Il est formé d'une lame d'acier flexible AOB recourbée en forme de V. Deux arcs métalliques partent l'un de la branche B, l'autre de la branche A ; le premier passe à travers une ouverture pratiquée en A et se termine par un anneau C qui permet de soutenir l'instrument ; le deuxième passe à travers une ouverture pratiquée en B et se

(1) Le poids sera défini plus loin.

termine par un crochet D auquel on suspend les poids à évaluer. On gradue l'instrument en suspendant des poids de 1, 2, 3 kilogrammes au crochet D, et en marquant des numéros correspondants aux points de l'arc BAC où vient s'arrêter chaque fois la branche A. En remplaçant ensuite ces poids par une force quelconque appliquée en D, on pourra évaluer l'intensité de cette force en kilogrammes.



On donne encore le nom de *peson à ressort* à un dynamomètre dans lequel la partie flexible est formée par un ressort à boudin enfermé dans une boîte métallique ayant la forme d'un cylindre. L'une des extrémités Q du ressort s'appuie sur la base supérieure du cylindre PQ ; l'autre extrémité P s'appuie sur un disque fixé à une tige qui traverse le ressort, qui traverse librement la base supérieure du cylindre et qui se termine par un anneau R. Un crochet est fixé à la base inférieure, et, selon que la force appliquée à ce crochet est plus ou moins considérable, la tige sort d'une longueur plus ou moins grande. On gradue cet appareil comme le précédent et l'on marque les divisions sur la tige elle-même.



Dynamomètre de Régnier et de Poncelet. — Il consiste essentiellement en deux lames d'acier légèrement convexes AB

et CD, réunies à leurs extrémités par deux pièces recourbées E et F. La pièce E est assujettie à un point fixe et la pièce F reçoit l'effort que l'on veut mesurer. Un levier GH est articulé au milieu de la branche CD et se relie avec un levier coudé HKL, dont la grande branche KL déplace une aiguille OM, mobile autour d'un point O. L'extrémité libre de l'aiguille parcourt les divisions d'un limbe gradué PQ. On gradue cet appareil comme les précédents.

Ajoutons que, d'une manière générale, les indications fournies par les dynamomètres manquent de précision, parce que les ressorts se fatiguent.

30. **Représentation géométrique des forces.** — Nous avons vu plus haut qu'une force dépend de trois éléments : le point d'application, la direction et l'intensité. On peut, d'après cela, représenter géométriquement une force.

O

F

x

A cet effet, on mène par le point d'application une droite ayant même direction que la force et l'on porte à partir du point d'application, suivant cette droite et dans le même sens, une longueur proportionnelle à l'intensité de la force. En d'autres termes, soit O le point d'application et soit Ox une demi-droite menée par O et ayant même direction et même sens que la force. Prenons une longueur arbitraire pour représenter l'unité de force et portons sur Ox, à partir du point O, une longueur dont la mesure, à l'aide de cette unité, soit égale à l'intensité de la force à représenter. Nous obtenons ainsi un segment OF qui est, par convention, la représentation géométrique de la force considérée. On termine habituellement ce segment par une flèche, et l'on dit indifféremment qu'il représente la force F ou la force OF.

31. **Définition de la résultante ; composition et décomposition des forces.** — Étant donné un système de forces F, F', F'', ..., il peut exister une force équivalente (24) au système ; cette force, quand elle existe, s'appelle la *résultante* du système de forces F, F', F'', ... ; celles-ci sont appelées les

composantes, et pour prouver l'existence de la résultante, quand il y en a une, on prouve habituellement qu'il existe une force R′ qui fait équilibre au système de forces F, F′, F″, ... ; alors, en vertu du numéro 24 et de la définition, la force R, égale et opposée à R′, est la résultante du système de forces F, F′, F″, ...

La *composition* des forces est l'opération qui a pour objet la détermination de la résultante de plusieurs forces ; la décomposition des forces est l'opération inverse. De ces deux opérations, c'est la première qui est la plus importante, et nous ne résoudrons les problèmes auxquels elles conduisent toutes deux que dans les chapitres suivants. Nous donnerons d'abord une définition et quelques propositions préliminaires.

32. **Définition**. — On dit qu'un corps est *rigide* quand les distances mutuelles des points de ce corps demeurent invariables quels que soient les efforts que l'on exerce sur le corps. Un corps *solide* est un corps rigide, car on peut négliger les déformations dues aux efforts qu'il supporte.

33. **Principe fondamental**. — *Pour que deux forces appliquées aux extrémités d'une barre rigide soient en équilibre, il faut et il suffit qu'elles aient la même intensité, des sens opposés et qu'elles aient en outre même direction que la barre ; ce que l'on exprime en disant que les deux forces doivent être* égales et directement opposées.

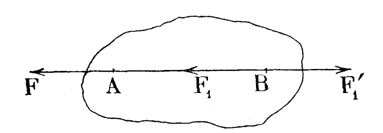
Nous regarderons ce principe comme un résultat de l'expérience, et nous allons en donner tout de suite quelques conséquences.

34. **Théorème I.** — *Pour que deux forces* P *et* Q *appliquées en deux points* A *et* B *d'un corps solide se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient égales et directement opposées.*

En effet, on peut considérer les deux forces P et Q comme appliquées aux extrémités d'une barre rigide AB.

35. **Théorème II.** — *On peut transporter une force en un point quelconque de sa direction, pourvu que ce point soit invariablement lié au premier, c'est-à-dire pourvu que les deux points d'application, le nouveau et l'ancien, fassent partie du même corps solide.*

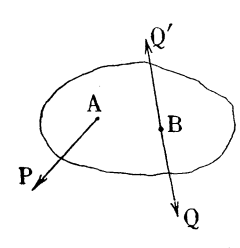
Soient en effet F une force appliquée en un point A d'un corps solide, et B un autre point du corps situé sur la droite indéfinie AF.



On ne change pas l'état du corps en appliquant au point B les deux forces BF_1 et BF_1, égales et opposées et de même intensité que F (23). Mais on ne change pas davantage l'état du corps en supprimant les deux forces AF et BF_1' qui se font équilibre en vertu du principe fondamental numéro 33. Il ne reste donc plus alors que la force BF_1, c'est-à-dire la force F dont le point d'application a été transporté au point B ; ce qui démontre la proposition.

36. **Théorème III.** — *Réciproquement, si une force* P *appliquée en un point* A *d'un corps solide peut être remplacée par une force* Q *appliquée en un point* B *du même corps, les deux forces* P *et* Q *sont égales, de même sens et appliquées suivant la même droite.*

Imaginons en effet un corps solide soumis à l'action d'une force P appliquée en un point A de ce corps et, au point B du même corps, appliquons les deux forces égales et opposées Q et Q' : l'état du corps ne sera pas changé. Mais puisque Q peut remplacer P, par définition même Q' qui fait équilibre à Q fait aussi équilibre à P. Donc, en vertu du théorème I, Q' et P sont égales et directement opposées, et, par suite, P et Q sont égales, de même sens et dirigées suivant la même droite.



37. Remarque. — D'après cela il n'y a pas lieu de considérer

comme distinctes deux forces égales et de même sens, agissant suivant la même droite.

38. **Corollaire.** — *Lorsqu'un système de forces a une résultante, cette résultante est unique.*

Car s'il y en avait deux, P et Q, ces deux forces, en vertu du théorème III, seraient égales, de même sens et agiraient suivant la même droite ; par suite elles ne seraient pas distinctes.

CHAPITRE II

PREMIÈRES NOTIONS SUR LES COUPLES

39. **Ligne d'action d'une force.** — Avant d'aborder la composition des forces, nous allons donner quelques notions sur un élément essentiel dans l'étude de la mécanique, et dont l'introduction, au début de cette étude, permet de simplifier les problèmes sur les forces : nous voulons parler des *couples*. Nous commencerons néanmoins par indiquer comment on peut effectuer la composition des forces dans un cas très simple, celui où toutes les forces sont appliquées au même point et agissent suivant la même droite. A l'avenir, quand plusieurs forces agiront suivant la même droite, nous dirons qu'elles ont la *même ligne d'action* et, d'une manière générale, nous appellerons *ligne d'action* d'une force, la droite suivant laquelle elle agit.

40. **Composition de plusieurs forces ayant la même ligne d'action.** — Lorsque plusieurs forces appliquées à un corps solide ont la même ligne d'action, on peut toujours les supposer appliquées au même point (35). Cela posé, nous examinerons plusieurs cas.

Premier cas : *Toutes les forces agissent dans le même sens.* — Par définition même, la résultante de ces forces est une force égale à leur somme, ayant la même ligne d'action et le même sens que les forces elles-mêmes (31 et 25).

Il est clair que l'on peut, inversement, considérer une force quelconque, F, comme la résultante de plusieurs autres dont la somme est égale à la force F et qui ont la même ligne d'action et le même sens que celle-ci.

Deuxième cas : *Deux forces de sens contraires.* — Soient P et

Q les deux forces et soit $P > Q$. On peut considérer la force P comme la résultante de deux autres, Q_1 et R, de même sens que P et dont les intensités respectives sont

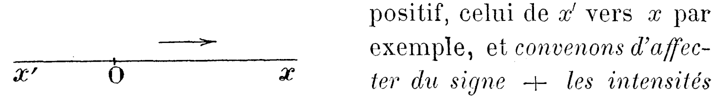
$$Q_1 = Q, \qquad R = P - Q.$$

Les deux forces Q_1 et Q, égales et opposées, se détruisent, et il ne reste plus que la force R.

Ainsi, *deux forces ayant même ligne d'action et des sens opposés, ont une résultante égale à leur différence et ayant la même ligne d'action et le même sens que la plus grande.*

Troisième cas : *Les forces, en nombre quelconque, ont des sens quelconques.* — Soit P la somme des forces qui agissent dans un sens, et soit Q la somme des forces qui agissent en sens contraire. La résultante du système est la même que celle des deux forces P et Q ; car on peut remplacer toutes les forces qui agissent dans un sens par P et toutes les forces qui agissent dans le sens opposé par Q (24 et 25). Si donc nous supposons $P > Q$, la résultante est égale à $P - Q$ et agit dans le même sens que la plus grande somme, c'est-à-dire que P.

41. Remarque. — Soit $x'x$ la ligne d'action de toutes les forces considérées, $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Fixons sur cette ligne un sens positif, celui de x' vers x par exemple, et *convenons d'affecter du signe + les intensités des forces qui sont dirigées dans ce sens, du signe — les autres,* en sorte que $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des nombres positifs ou négatifs. Moyennant cette convention, les résultats du numéro précédent sont compris dans l'énoncé suivant :



La résultante d'un nombre quelconque de forces ayant la même ligne d'action, est égale en grandeur et sens à la somme algébrique de toutes ces forces.

En d'autres termes, si R est cette résultante on a, en grandeur et sens,

$$(1) \qquad R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n.$$

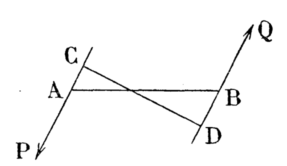
En effet :

1° La valeur absolue de la somme est, d'après les règles du calcul algébrique, égale à la différence entre la somme des forces qui agissent dans un sens et la somme des forces qui agissent en sens contraire ; elle est donc égale à la valeur absolue de R ;

2° Suivant que la somme $F_1 + F_2 + \ldots + F_n$ est positive ou négative, la résultante R est dirigée dans le sens de x' vers x ou en sens contraire ; ce qui revient à dire que cette somme et R ont le même signe. L'égalité (1) définit donc bien la résultante en grandeur et sens.

42. **Définition d'un couple.** — On appelle *couple*, en mécanique, un système de deux forces de même intensité, parallèles et de sens contraires, appliquées aux extrémités d'une droite de longueur non nulle, mais non directement opposées.

43. **Éléments constitutifs d'un couple.** — Considérons un couple défini par les deux forces P et Q appliquées respectivement aux points A et B d'un corps solide. Sans changer l'intensité des forces du couple, on peut supposer que chacune d'elles soit appliquée en un point quelconque de sa ligne d'action, pourvu que ces divers points appartiennent au corps soumis à l'action du couple ; si donc CD est une perpendiculaire commune aux deux forces, on peut les supposer appliquées respectivement en C et en D. Ceci revient à dire que l'on peut supposer les deux forces perpendiculaires à la droite aux extrémités de laquelle elles agissent, et c'est ce que nous supposerons toujours à l'avenir. La longueur de cette droite, perpendiculaire commune aux deux forces, s'appelle le *bras de levier* du couple ; la valeur commune des deux forces s'appelle la *force* du couple : un couple de bras de levier CD et de force P sera représenté souvent, dans ce qui suit, par le symbole (P.CD).



D'après cela, un couple apparaît comme constitué de deux

éléments : le bras de levier et la force. Il paraît naturel d'admettre que son effet sur un corps dépend lui-même de ces deux éléments ; mais un examen plus attentif montre que cet effet dépend d'un troisième élément. Si l'on imagine, en effet, qu'un observateur soit debout sur le plan du couple, par rapport à cet observateur, les deux forces du couple tendent à faire tourner le corps auquel elles sont appliquées soit de droite à gauche, soit de gauche à droite. Ce sens de rotation sera appelé le *sens de rotation du couple* ou, plus brièvement, le *sens* du couple.

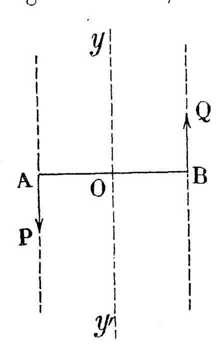
Ainsi, il y a trois éléments constitutifs d'un couple : la force, le bras de levier et le sens. Nous verrons bientôt que deux couples situés dans le même plan ou dans des plans parallèles et qui sont constitués des mêmes éléments, peuvent être remplacés l'un par l'autre, autrement dit, sont *équivalents*.

44. **Couple nul**. — Il n'existe pas de couple si la force du couple est nulle ; les deux forces du couple se font équilibre si le bras de levier est nul : on peut donc dire qu'un couple est *nul* soit quand la force est nulle, soit quand le bras de levier est nul. Il est naturel, d'après cela, de dire qu'un couple tend vers zéro quand l'un quelconque de ces deux éléments ou tous les deux tendent vers zéro.

45. **Un couple n'a pas de résultante.** — L'utilité de l'introduction des couples résulte de ce qu'*un couple n'a pas de résultante*. On peut regarder cette proposition comme un résultat de l'expérience ; mais voici comment on peut l'établir :

Considérons un couple PABQ et imaginons qu'on le fasse tourner de 180° autour de la perpendiculaire au plan du couple, menée par le milieu du bras de levier : le couple n'est pas changé. Par conséquent, s'il existe une résultante, cette résultante n'est pas changée elle-même, ce qui exige qu'elle soit dirigée suivant l'axe autour duquel on a fait tourner. Mais comme l'on peut transporter le point d'application de chacune des forces P et Q en un point quelconque de sa

ligne d'action, on peut prendre pour axe de rotation une droite quelconque perpendiculaire au plan du couple et rencontrant la droite yy' équidistante de P et de Q. Il en résulte que si un couple admet une résultante, il en admet une infinité, résultat contradictoire avec la proposition démontrée numéro 38; donc un couple n'a pas de résultante.



Ajoutons aussi qu'un couple n'est pas en équilibre, en vertu du principe énoncé numéro 33.

46. **Théorème I.** — *On peut faire tourner un couple autour d'un point quelconque de son plan sans que l'état du corps, au point de vue des forces qui agissent sur lui, soit changé.*

La démonstration de cette proposition repose sur les deux lemmes suivants :

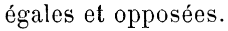
Lemme I. — *Lorsque deux forces* P *et* Q *appliquées au même point matériel ne sont pas égales et opposées, elles ont une résultante.*

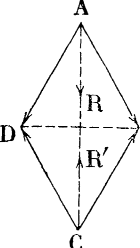
On voit d'abord que ces deux forces ne se font pas équilibre (33) ; il en résulte qu'elles tendent à déplacer leur point d'application. Mais on peut empêcher le déplacement de ce point en lui appliquant une force R' convenablement choisie ; dès lors la force R, égale et opposée à R', peut remplacer les deux forces P et Q (31).

Lemme II. — *Un losange rigide est en équilibre sous l'action de forces égales dirigées suivant ses côtés, et dont deux sont appliquées en un sommet et les deux autres au sommet opposé.*

Considérons en effet un losange ABCD soumis à l'action de quatre forces égales : AB et AD, appliquées au point A ; CB et CD, appliquées au point C. Il est clair d'abord que la résultante R des deux premières est dirigée suivant AC ; car si l'on fait tourner le système de ces deux forces de 180° autour de AC, il ne change pas, ce qui exige que la résultante coïncide avec l'axe de rotation. On voit de la même manière

que la résultante R′ des deux autres a la même ligne d'action AC. Nous allons montrer que R et R′ sont égales et opposées.

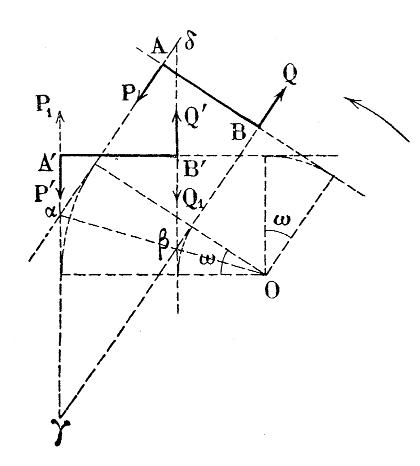




Pour cela, supposons qu'elles ne le soient pas et faisons tourner le système des quatre forces de 180° autour de BD ; comme le système n'est pas changé, la résultante, qui existe et n'est autre que celle de R et de R′, n'est pas changée non plus, ce qui exige qu'elle soit dirigée suivant l'axe de rotation BD. Mais si R et R′ ne sont pas égales et opposées, cette résultante est dirigée suivant AC. Ces deux résultats étant contradictoires, il faut que R et R′ soient égales et opposées, c'est-à-dire que le losange soit en équilibre.

Ajoutons que la proposition ne cesse évidemment pas d'être vraie si l'on suppose que les forces AD et CD soient appliquées au point D, et que les forces AB et CB soient appliquées au point B.

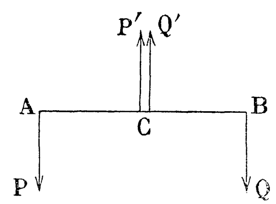
Cela posé, la démonstration du théorème I ne présente plus aucune difficulté. Considérons en effet un couple PABQ, et faisons tourner ce couple autour d'un point quelconque O de son plan, d'un angle quelconque ω et dans le sens indiqué par la flèche de la figure ci-contre, de manière à l'amener en P′A′B′Q′. Je dis que le couple P′A′B′Q′ est équivalent au premier. Pour le prouver, j'applique au point A′ les deux forces P′ et P_1, égales et opposées et de même intensité que P ; au point B′ j'applique de même les forces Q_1 et Q′, égales et opposées et de même intensité que P ou que Q, ce qui



revient au même. L'état du corps ne sera évidemment pas changé et il est visible, sur la figure, que les lignes d'action de toutes ces forces étant prolongées, on obtient un losange $\alpha\gamma\beta\delta$, car toutes les droites du plan du couple tournent de l'angle ω autour du point O. Si on applique alors les forces P et P_1 au point α, puis les forces Q et Q_1 au point β, on obtient un système de quatre forces en équilibre en vertu du lemme II ; il ne reste donc plus, en supprimant ces quatre forces, que le couple P'A'B'Q' ; donc ce couple est équivalent au couple PABQ, ce qui démontre la proposition.

47. **Corollaire I.** — *Deux forces égales, parallèles et de même sens, appliquees à un corps solide, ont une résultante de même sens qu'elles, égale à leur somme et appliquée au milieu de la droite qui joint leurs points d'application.*

On peut en effet supposer les deux forces considérées, P et Q, perpendiculaires sur la droite AB qui joint leurs points d'application. Tout revient alors à prouver que les deux forces P' et Q', égales et de sens contraire à P, appliquées au milieu C de AB, font équilibre aux deux forces P et Q. Or, cela devient évident si l'on fait tourner le couple (Q.BC) de 180° autour du point C, de manière à amener B en A ; car, après cette rotation, Q et P d'une part, Q' et P' de l'autre, se détruisent.

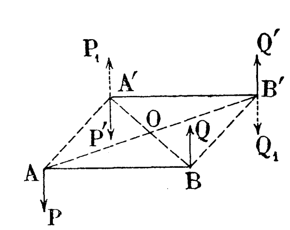


Comme les deux forces P' et Q' ont une résultante égale à $P' + Q'$, il suit de là que la force $P + Q$, égale et opposée à $P' + Q'$, peut remplacer les deux forces P et Q.

48. **Corollaire II.** — *Un couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans son plan ou dans tout plan parallèle.*

Soit en effet un couple (P.AB) et soit A'B' égale et parallèle à AB, de telle sorte que la figure ABA'B' soit un parallélogramme de centre O. En A' appliquons deux forces P' et P_1, égales et opposées et de même intensité que P ; opérons de même en B' avec les deux forces Q_1 et Q', de même

intensité que P, toutes ces forces étant d'ailleurs parallèles à P, comme la figure l'indique. Les deux forces P et Q_1 ont une résultante d'intensité 2P, appliquée en O ; pareillement, P_1 et Q ont une résultante appliquée au même point, de même intensité et de sens contraire à la première. Donc ces quatre forces se font équilibre et on peut les supprimer ; il ne reste donc plus alors que le couple (P'.A'B'), c'est-à-dire le couple (P.AB) transporté parallèlement à lui-même.



49. **Corollaire III**. — *On peut déplacer un couple à volonté dans son plan ou dans tout plan parallèle.*

Car tout déplacement de cette nature peut être obtenu soit par une rotation, soit par une translation, soit par ces deux opérations effectuées successivement.

50. Remarque. — Dans les propositions qui suivent, nous ne considérerons que des couples situés dans le même plan ou dans des plans parallèles.

51. **Égalité de deux couples**. — Deux couples sont *égaux*, par définition, quand on peut les amener à coïncider, sans que l'état du corps auquel ils sont appliqués soit changé.

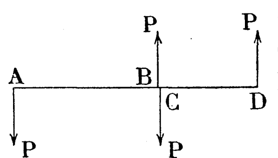
52. **Théorème II**. — *Lorsque deux couples situés dans le même plan ou dans des plans parallèles ont le même sens de rotation, des forces égales et des bras de levier égaux, ils sont égaux.*

En effet, en vertu du corollaire III on peut faire coïncider ces deux couples sans que l'état du corps soit changé.

53. **Somme de deux couples**. — Considérons deux couples situés dans le même plan ou dans deux plans parallèles et ayant même sens de rotation.

1° Si ces deux couples ont des forces égales, nous appellerons *somme* de ces couples un autre couple ayant même sens de rotation, même force et un bras de levier égal à la somme des deux bras de levier.

2° Si les deux couples ont des bras de levier égaux, leur *somme* sera, par définition, un couple de même sens de rotation, de même bras de levier et ayant pour force la somme des deux forces.



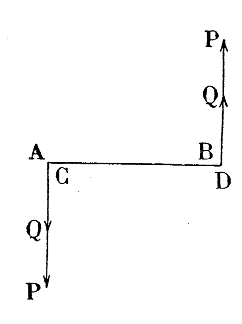
Nous écrirons dans le premier cas

$$(P.AB)+(P.CD)=(P.AB+CD);$$

et dans le deuxième,

$$(P.AB)+(Q.AB)=(P+Q.AB).$$

Pour justifier la première de ces deux définitions, il suffit de remarquer que les deux couples considérés (P. AB) et (P. CD) peuvent toujours être amenés à occuper la position indiquée par la première des deux figures ci-contre; et alors il est visible qu'ils peuvent être remplacés par le couple unique de force P et de bras de levier $AD = AB + CD$.



Pour justifier de même la deuxième, il suffit de remarquer que les deux couples considérés peuvent être amenés à occuper la position indiquée par la deuxième figure; et alors il est visible qu'ils peuvent être remplacés par le couple unique dont la force est $P+Q$ et le bras de levier AB.

Ajoutons : 1° Que la définition de la somme de plusieurs couples ayant soit la même force, soit le même bras de levier, et ayant en outre le même sens de rotation, résulte de la définition de la somme de deux couples; 2° Que, comme dans toutes les questions analogues, la définition de la différence de deux couples est une conséquence de celle de la somme, de même d'ailleurs que la définition d'un couple plus grand ou plus petit qu'un autre.

54. **Multiples et sous-multiples d'un couple.** — En vertu de la définition de la somme de plusieurs couples ayant le même sens de rotation, un *multiple* du couple (P.AB) sera défini par

l'un ou l'autre des deux symboles $(P.mAB)$, $(mP.AB)$, m désignant un nombre entier ; de sorte qu'on pourra écrire les égalités symboliques

$$(P.mAB) = (mP.AB) = m(P.AB).$$

Pareillement, un *sous-multiple* du couple $(P.AB)$ sera défini par l'un ou l'autre des deux symboles $\left(P \cdot \frac{AB}{m}\right)$, $\left(\frac{P}{m} \cdot AB\right)$; de sorte qu'on pourra écrire les égalités symboliques

$$\left(P \cdot \frac{AB}{m}\right) = \left(\frac{P}{m} \cdot AB\right) = \frac{1}{m}(P.AB).$$

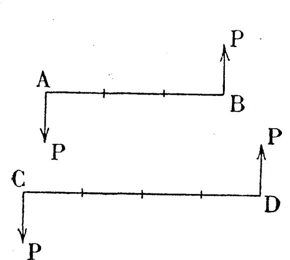
55. **Mesure des couples.** — *Mesurer* un couple, c'est le comparer à un autre couple pris pour unité. La mesure des couples résulte des définitions qui précèdent et des théorèmes qui suivent.

56. **Rapport de deux couples.** — La définition du rapport de deux couples est identique à la définition du rapport de deux grandeurs quelconques de même espèce.

57. **Théorème III.** — *Lorsque deux couples situés dans le même plan ou dans des plans parallèles ont le même sens de rotation et la même force, leur rapport est égal à celui de leurs bras de levier.*

Soient $(P.AB)$ et $(P.CD)$ les deux couples considérés. Nous examinerons deux cas suivant que les deux bras de levier ont ou n'ont pas de commune mesure.

Supposons d'abord qu'ils aient une commune mesure l, contenue par exemple 3 fois dans AB et 4 fois dans CD, de telle sorte que $AB = 3l$ et $CD = 4l$. Considérons le couple $(P.l)$ dont la force est P, le bras de levier l, et le sens de rotation le même que celui des deux couples donnés. On a évidemment



$$(P.AB) = 3(P.l),$$
$$(P.\ CD = 4(P.l),$$

et par suite $$\frac{(\mathrm{P.AB})}{(\mathrm{P.CD})} = \frac{3}{4};$$

mais on a aussi $$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}} = \frac{3}{4};$$

donc $$\frac{(\mathrm{P.AB})}{(\mathrm{P.CD})} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CD}}.$$

Supposons maintenant que les deux bras de levier n'aient pas de commune mesure ; leur rapport est alors incommensurable, et il en est de même de celui des deux couples. Pour prouver dans ce cas l'égalité des deux rapports, on prouve, comme dans toutes les questions du même genre, que leurs valeurs approchées à $\frac{1}{p}$ près sont égales, quel que soit p.

58. **Théorème IV.**— *Lorsque deux couples, situés dans le même plan ou dans deux plans parallèles, ont le même sens de rotation et le même bras de levier, leur rapport est égal à celui de leurs forces.*

La démonstration de cette proposition est identique, au fond, à celle du théorème précédent : il n'y a qu'à substituer les forces aux bras de levier, et inversement.

59. **Corollaires.** — 1° *Lorsque deux couples, situés dans le même plan ou dans des plans parallèles, ont le même sens de rotation, leur rapport est égal au produit du rapport des forces par le rapport des bras de levier.*

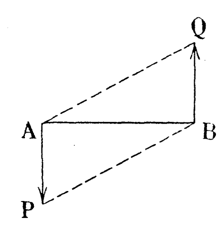
La démonstration est la même que celle que l'on donne en géométrie élémentaire pour prouver que le rapport des aires de deux rectangles est égal au produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs.

Comme en géométrie élémentaire aussi on prouve :

2° *Que si l'on prend pour unité de couple celui dont la force est égale à l'unité de force et dont le bras de levier est égal à l'unité de longueur, le nombre qui mesure un couple est égal au produit du nombre qui mesure la force par le nombre qui mesure le bras de levier.*

Nous dirons plus brièvement que la mesure d'un couple est égale au produit de la force par le bras de levier.

60. **Moment d'un couple.** — On appelle *moment* d'un couple le produit du nombre qui mesure la force par le nombre qui mesure le bras de levier. Le moment d'un couple exprime en quelque sorte la mesure de l'action du couple.



Considérons la figure géométrique formée par le bras de levier et les forces d'un couple, et supposons que la longueur choisie pour représenter l'unité de force soit égale à l'unité de longueur. Si alors on construit le parallélogramme dont deux côtés opposés sont les forces du couple et dont une diagonale est le bras de levier, on voit que le moment du couple est exprimé par le même nombre que l'aire de ce parallélogramme.

61. **Corollaire.** — *Deux couples de même moment et de même sens de rotation, situés dans le même plan ou dans des plans parallèles, sont équivalents.*

62. **Théorème V.** — *Un couple quelconque peut être remplacé par un autre dont le bras de levier soit donné à l'avance.*

Soient, en effet, a le nombre qui mesure le bras de levier, P le nombre qui mesure la force et x un nombre quelconque; on a identiquement

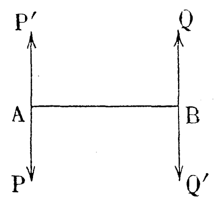
$$P.a = \left(\frac{Pa}{x}\right) \cdot x.$$

Si donc on considère le couple dont le bras de levier est x et dont la force est $\frac{Pa}{x}$, ce couple est équivalent au proposé, puisque son moment est égal à celui du premier.

63. **Corollaire.** — *Lorsque deux couples, situés dans le même plan ou dans deux plans parallèles, ont des moments égaux et des sens de rotation contraires, ils se font équilibre.*

En effet, on peut remplacer ces deux couples par deux

autres respectivement équivalents et ayant des bras de levier



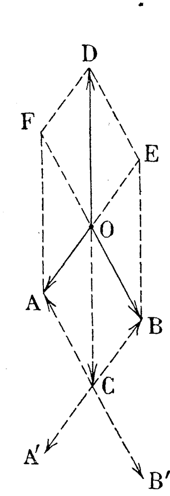
égaux; les moments étant égaux, les intensités des deux forces seront les mêmes. Mais alors si les sens de rotation sont contraires et si PABQ est le premier couple, on peut amener le second en P′ABQ′, et il est visible, dans ces conditions, qu'ils se font équilibre.

CHAPITRE III

COMPOSITION DES FORCES APPLIQUÉES A UN POINT MATÉRIEL

64. **Règle du parallélogramme des forces. — Théorème. —** *La résultante de deux forces appliquées au même point et dans deux directions différentes est égale en grandeur, direction et sens à la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces.*

Soient OA et OB les deux forces appliquées au même point O et soit OC la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces. Prouvons d'abord que la résultante de ces deux forces est dirigée suivant OC. Pour cela, remarquons que l'état du corps, dont on peut toujours supposer que le point fasse partie, ne change pas si l'on applique au point C deux forces CA′ et CB de même intensité que OA, puis deux forces CB′ et CA de même intensité que OB. Mais les deux forces OA et CB définissent un couple dont le moment est représenté par l'aire du parallélogramme OACB ; de même OB et CA définissent un couple de même moment ; d'ailleurs ces deux couples sont évidemment de sens contraire; donc ils se font équilibre et on peut supprimer les quatre forces OA, OB, CA, CB. Il ne reste plus alors que les forces CA′ et CB′ appliquées au point C, ce qui montre que la résultante des deux forces OA et OB peut être elle-même appliquée au point C ; mais le point d'application d'une force ne peut être transporté qu'en un point de la direction de cette force (36) ; donc la diagonale OC est la direction de la résultante.



Prouvons maintenant que cette résultante est représentée

par la diagonale OC, en grandeur et sens. Pour cela, prolongeons OC d'une longueur $OD = OC$ et considérons les trois forces OA, OB, OD : tout revient évidemment à prouver que ces trois forces se font équilibre. Supposons alors qu'elles ne se fassent pas équilibre : elles auront une résultante de direction bien définie (38). Mais cette résultante passe par le point C, car les deux forces OA et OB peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes au point C et, d'autre part, le point d'application de OD peut aussi être transporté en un point C de la direction de cette force. Or, si l'on prolonge OA d'une longueur $OE = OA$, puis OB d'une longueur $OF = OB$, comme OE et OF sont les diagonales des parallélogrammes construits respectivement sur OB et OD, sur OA et OD, le même raisonnement prouve que cette résultante de direction bien définie devrait passer aussi par E et par F, ce qui est évidemment impossible. Donc les trois forces OA, OB, OD se font équilibre et, par suite, la force OC, égale et opposée à OD, peut remplacer les deux forces OA et OB (31).

65. Remarque. — La règle de composition de deux forces, fournie par la proposition qui vient d'être démontrée, s'appelle la *règle du parallélogramme des forces.*

66. **Corollaires.** — 1° *Le carré de la résultante de deux forces est égal à la somme des carrés des composantes, augmentée du double produit de ces forces par le cosinus de l'angle formé par leurs directions.*

Posons

$$OA = P, \qquad OB = Q, \qquad OC = R ;$$

il s'agit de prouver que l'on a

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos AOB.$$

On a en effet, dans le triangle AOC,

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.OA \cos OAC,$$

et, en remarquant que $\cos AOC = - \cos AOB$, il vient

$$(1) \qquad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos AOB.$$

On retrouve la résultante de deux forces agissant suivant la même droite en supposant que $\widehat{AOB}$ est égal à zéro ou à 180°, car, dans le premier cas, $\cos AOB = 1$, et par suite

$$R^2 = (P + Q)^2,$$

d'où

$$R = P + Q.$$

De même, dans le second cas, $\cos AOB = -1$; par suite si $P > Q$, on a

$$R^2 = (P - Q)^2,$$

d'où

$$R = P - Q.$$

2° *Si* R *est la résultante de deux forces* P *et* Q, *chacune de ces trois forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres.*

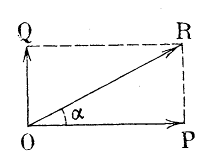
On a en effet, dans le triangle OAC,

$$\frac{OA}{\sin OCA} = \frac{AC}{\sin AOC} = \frac{OC}{\sin OAC};$$

on en déduit

$$(2) \qquad \frac{P}{\sin (Q, R)} = \frac{Q}{\sin (R, P)} = \frac{R}{\sin (P, Q)}.$$

67. **Cas particulier.** — Supposons les deux forces P et Q rectangulaires et appelons α l'angle de la force P avec la résultante R. On a immédiatement



$$P = R \cos \alpha,$$
$$Q = R \sin \alpha,$$
$$P^2 + Q^2 = R^2.$$

On en déduit

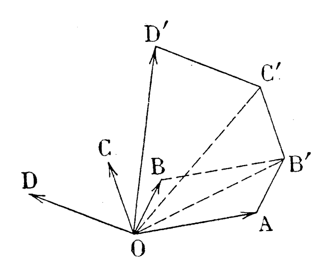
$$\cos \alpha = \frac{P}{R}, \qquad \sin \alpha = \frac{Q}{R}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P},$$

formules qui permettent de calculer P et Q en fonction de R et de α, ou inversement.

68. **Décomposition d'une force en deux autres.** — Au point de vue géométrique, comme au point de vue analytique, cela revient à construire ou à résoudre le triangle OAC, connaissant un côté OC et deux autres éléments. On a donc les cas classiques de construction ou de résolution des triangles et les discussions correspondantes.

69. **Composition d'un nombre quelconque de forces appliquées au même point. — Théorème.** — *La résultante de plu-*

sieurs forces appliquées au même point est représentée en grandeur, direction et sens, par la somme géométrique des vecteurs qui représentent ces forces.



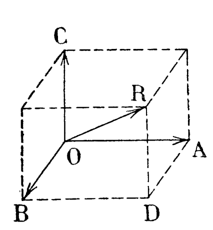
Considérons par exemple quatre forces OA, OB, OC, OD. Pour obtenir leur résultante, nous déterminons d'abord la résultante OB' des deux forces OA et OB, en construisant le parallélogramme OAB'B ou, ce qui revient au même, en menant AB' égal et parallèle à OB et de même sens que lui ; puis la résultante OC' de OB' et de OC en menant B'C' égal et parallèle à OC et de même sens que lui ; et ainsi de suite. Ces constructions sont identiques à celles qui donnent la somme géométrique des vecteurs OA, OB, OC, OD ; d'où résulte la proposition.

70. Remarque. — La règle de composition de plusieurs forces fournie par le théorème précédent porte le nom de *règle du polygone* des forces.

71. **Corollaires.** — La résultante étant unique, est indépendante de l'ordre de composition ; donc *pour obtenir la somme géométrique de plusieurs vecteurs, on peut intervertir à volonté l'ordre des opérations.*

On voit de même qu'*une somme géométrique de vecteurs ne change pas quand on remplace deux ou plusieurs vecteurs par leur somme géométrique, ou inversement.*

72. **Parallélépipède des forces.** — Considérons en particulier trois forces OA, OB, OC formant un trièdre et construisons le parallélépipède dont OA, OB, OC sont les arêtes. Dans ce parallélépipède l'arête AD est égale et parallèle à OB ; de même DR est égale et parallèle à OC. Donc, *la résultante de trois forces formant un trièdre est la dia-*

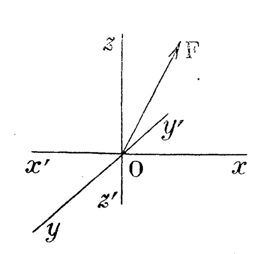


gonale du parallélépipède construit sur ces trois forces. De là le nom de *parallélépipède des forces*.

73. **Décomposition d'une force en trois autres dirigées suivant les arêtes d'un trièdre.** — Cela revient à construire un parallélépipède connaissant la diagonale et les directions des arêtes. En se reportant à la figure précédente, on voit sans difficulté que les composantes cherchées sont respectivement égales aux projections de la diagonale sur chacune des arêtes, parallèlement au plan des deux autres.

74. **Application de cette décomposition à la détermination de la résultante.** — Nous venons de voir qu'une force quelconque, F, peut être décomposée en trois autres, dirigées suivant les arêtes d'un trièdre ayant pour sommet le point d'application. Inversement, connaissant ces trois composantes, on en déduit la force F en appliquant la règle du parallélépipède des forces.

Considérons alors des forces en nombre quelconque, F_1, F_2, ..., F_n, appliquées en un même point O. Menons par ce point trois droites quelconques formant un trièdre, et décomposons chaque force, d'après la règle du parallélépipède des forces, en trois autres dirigées respectivement suivant les arêtes de ce trièdre. Toutes celles de ces forces dont la ligne d'action est Ox ont une résultante X ayant la même ligne d'action ; celles dont la ligne d'action est Oy ont une résultante Y ; et enfin celles dont la ligne d'action est Oz ont une résultante Z.



La résultante du système de forces considérées est la même que celle des trois forces X, Y, Z et s'obtient d'après la règle du parallélépipède des forces.

Sur chacune des arêtes du trièdre, fixons un sens positif et un sens négatif, et convenons d'affecter du signe + les intensités des forces dont le sens est le sens positif de leur ligne

d'action, du signe — les intensités des autres. Si l'on appelle alors X_i, Y_i, Z_i les composantes de la force F_i, X, Y, Z, comme plus haut, celles de la résultante, on a (40)

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \Sigma X_i,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = \Sigma Y_i,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n = \Sigma Z_i.$$

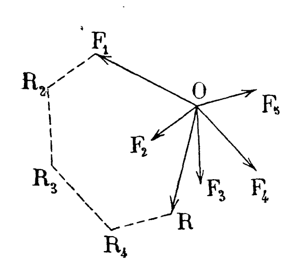
Lorsque les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont dans le même plan, on peut prendre les axes Ox et Oy dans ce plan ; alors toutes les composantes suivant Oz sont nulles, et les formules précédentes deviennent

$$X = \Sigma X_i,$$
$$Y = \Sigma Y_i.$$

Quant à la composante Z, elle est nulle et la résultante du système s'obtient en composant X et Y, d'après la règle du parallélogramme des forces.

75. **Projections de la résultante sur un axe.** — Ces diverses relations peuvent être obtenues beaucoup plus rapidement par l'emploi du théorème suivant :

La projection sur un axe quelconque, parallèlement à un plan quelconque, de la résultante d'un système de forces appliquées au même point est égale à la somme algébrique des projections des composantes.



Considérons en effet un système de forces $F_1, F_2, \ldots, F_5$, appliquées au même point O, et construisons leur résultante R, d'après la règle du polygone des forces ; puis imaginons que l'on projette le contour $OF_1R_2R_3R_4R$ et sa résultante OR sur un axe quelconque et dans un système de projections quelconque.

On a vu (17, 3°) que

$$\text{pr. } OR = \text{pr. } OF_1 + \text{pr. } F_1R_2 + \cdots + \text{pr. } R_4R\,;$$

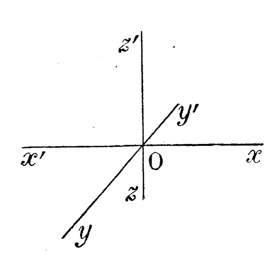
mais on a

$$\text{pr. } OF_1 = \text{pr. } F_1,$$
$$\text{pr. } F_1R_2 = \text{pr. } F_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

donc

$$\text{pr. } OR = \text{pr. } F_1 + \text{pr. } F_2 + \cdots + \text{pr. } F_5.$$

Cela posé, nous avons vu (73) que si l'on décompose une force suivant les arêtes d'un trièdre, l'une quelconque des composantes est la projection de la force sur l'arête correspondante, parallèlement au plan des deux autres arêtes. Si donc on appelle R la résultante d'un système de forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, et si l'on conserve les notations du numéro précédent, on a, en projetant sur l'axe $x'x$,



$$X = \text{pr. } R, \qquad X_i = \text{pr. } F_i\,;$$

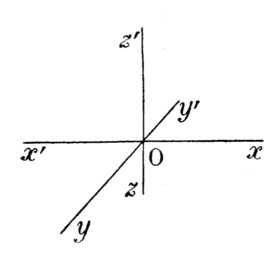
et l'on aurait des expressions analogues en projetant sur les deux autres axes, $y'y$ et $z'z$.

Il en résulte, en appliquant le théorème que nous venons de démontrer,

$$X = \Sigma X_i,$$
$$Y = \Sigma Y_i,$$
$$Z = \Sigma Z_i.$$

Ces formules se réduisent d'ailleurs aux deux premières quand toutes les forces sont situées dans le même plan et que l'on projette sur deux axes situés dans ce plan. On retrouve ainsi les résultats du numéro précédent.

76. **Détermination analytique de la résultante.** — Proposons-nous, d'après cela, de calculer les éléments qui définissent la résultante R d'un système de forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, appliquées au même point O. A cet effet, imaginons que l'on ait mené par le point O trois axes formant un trièdre trirectangle, et fixons un sens positif et un sens négatif sur chacun d'eux. Appelons X, Y, Z les projections orthogonales de la résultante sur ces trois axes respectifs, α, β, γ les angles qu'elle fait respectivement avec Ox, Oy et Oz. Appelons enfin X_i, Y_i, Z_i, α_i, β_i, γ_i les éléments analogues à



$X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma,$ relatifs à l'une quelconque des forces, à la force F_i par exemple. On a évidemment (73)

$$X_i = F_i \cos \alpha_i,$$
$$X = R \cos \alpha,$$

et des expressions analogues pour Y_i et Z_i d'une part, Y et Z de l'autre. On en conclut, en vertu du théorème démontré plus haut (75),

$$X = \Sigma X_i = \Sigma F_i \cos \alpha_i,$$
$$Y = \Sigma Y_i = \Sigma F_i \cos \beta_i,$$
$$Z = \Sigma Z_i = \Sigma F_i \cos \gamma_i.$$

Les composantes X, Y, Z de la résultante étant ainsi définies, des relations

$$X = R \cos \alpha, \qquad Y = R \cos \beta, \qquad Z = R \cos \gamma,$$

on déduit successivement

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

et $$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \qquad \cos \beta = \frac{Y}{R}, \qquad \cos \gamma = \frac{Z}{R}.$$

Ces formules définissent l'intensité de la résultante et les angles qu'elle fait avec les axes. On peut en réduire le nombre quand les forces sont situées dans le même plan ; il suffit de supposer pour cela que les deux axes Ox et Oy soient situés dans ce plan. En remarquant alors que $\beta_i = \frac{\pi}{2} - \alpha_i$, que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et enfin que $Z = Z_i = 0$, on obtient

$$X = \Sigma F_i \cos \alpha_i,$$
$$Y = \Sigma F_i \sin \alpha_i;$$

d'où l'on tire $$R^2 = X^2 + Y^2,$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{R}, \qquad \sin \alpha = \frac{Y}{R}, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Y}{X}.$$

CHAPITRE IV

ÉQUILIBRE D'UN POINT MATÉRIEL

77. **Point matériel libre ou gêné.** — On dit qu'un point matériel est *libre* quand il peut se déplacer dans toutes les directions de l'espace ; on dit qu'il est *gêné* dans le cas contraire. Un point matériel assujetti à rester sur une ligne ou sur une surface est un point gêné.

Quand un point matériel est assujetti à rester sur une ligne ou sur une surface, *on admet* qu'il exerce une certaine action et qu'il éprouve, de la part de la ligne ou de la surface, une *réaction* égale et opposée. C'est en cela que consiste le *principe de l'égalité de l'action et de la réaction,* énoncé par Newton. Si le déplacement du point sur la ligne ou sur la surface peut s'effectuer sans frottement, on admet que l'action et la réaction sont normales, soit à la ligne, soit à la surface, suivant les cas ; de sorte qu'on peut faire abstraction, soit de la ligne, soit de la surface, et considérer le point comme libre, à condition de lui appliquer une force N convenablement choisie et égale à la réaction normale. La force égale et opposée à N est la *pression* du point sur la ligne ou sur la surface.

Pour trouver les conditions d'équilibre d'un point matériel, nous aurons donc trois cas à examiner, suivant que le point est libre, assujetti à rester sur une surface, ou assujetti à rester sur une ligne.

78. **Équilibre d'un point matériel libre.** — Pour qu'un point matériel libre soit en équilibre, il faut évidemment et il suffit que la résultante de toutes les forces qui agissent sur ce point soit nulle. Si donc on compose toutes ces forces d'après la règle du polygone des forces, pour que le point soit en équilibre, *il faut et il suffit que le polygone des forces soit fermé.*

Quant aux expressions analytiques de cette condition, elles

résultent des propositions suivantes, dont on trouvera la démonstration dans tous les cours de trigonométrie :

1° *Pour qu'une ligne polygonale gauche soit fermée, il faut et il suffit que les projections de cette ligne sur les arêtes d'un trièdre soient nulles ;*

2° *Pour qu'une ligne polygonale plane soit fermée, il faut et il suffit que ses projections sur deux axes quelconques menés dans son plan et qui se coupent, soient nulles.*

D'après cela, supposons d'abord que les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ appliquées au point matériel soient situées d'une manière quelconque dans l'espace, et projetons sur trois axes $x'x$, $y'y$, $z'z$, rectangulaires ou non, mais formant un trièdre. En appelant X_i, Y_i, Z_i les projections respectives de la force F_i, les conditions d'équilibre seront

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Y_i = 0, \qquad \Sigma Z_i = 0.$$

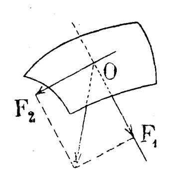
Supposons en second lieu que les forces soient dans le même plan et projetons sur deux axes Ox et Oy de ce plan. En conservant les mêmes notations, nous n'aurons plus que deux conditions d'équilibre

$$\Sigma X_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma Y_i = 0.$$

79. **Équilibre d'un point matériel placé sur une surface.** — Géométriquement, on voit que *pour qu'un point soit en équilibre sur une surface, il faut et il suffit que la résultante des forces qui agissent sur ce point soit normale à la surface.*

C'est suffisant, car si elle est normale à la surface, elle est égale à la pression du point sur la surface et est détruite par la réaction ou résistance.

C'est nécessaire, car si elle n'est pas normale, elle peut être décomposée en deux autres, F_1 et F_2, l'une, F_1, normale à la surface et l'autre, F_2, tangente. La première, égale à la pression, est détruite par la résistance de la surface, et la deuxième entraînerait le point, qui ne serait par suite pas en équilibre.



Pour exprimer analytiquement ces conditions, on projette les

forces appliquées au point sur deux droites rectangulaires, menées par le point dans le plan tangent à la surface ; puis on exprime que la somme algébrique des projections sur chacune de ces droites est nulle. On obtient ainsi deux équations pour définir la position d'équilibre.

Pour évaluer la pression, on fait la somme algébrique des projections des forces sur la normale à la surface, menée par le point qui correspond à la position d'équilibre. La réaction est égale et opposée à l'action.

80. Remarque. — Au lieu d'opérer ainsi, on peut encore, pour trouver les positions d'équilibre et la pression, appliquer au point, et en outre des forces qui agissent sur lui, une force N, normale à la surface et égale à la réaction, inconnue d'ailleurs; puis traiter ce point comme un point matériel libre et projeter toutes ces forces, y compris N, sur trois axes rectangulaires quelconques. On aurait ainsi trois équations dont deux pour définir les positions d'équilibre et la troisième pour déterminer N. Cette méthode est généralement moins avantageuse que la première, et se ramène à la première si les trois axes sont constitués par deux tangentes et la normale à la surface menée par le point qui correspond à la position d'équilibre.

81. **Équilibre d'un point matériel placé sur une ligne.** — On voit, comme pour les surfaces, que la résultante des forces qui agissent sur le point doit être normale à la ligne, c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente. La valeur de cette résultante est encore la pression du point sur la ligne, et la réaction ou résistance de la ligne lui est égale et opposée.

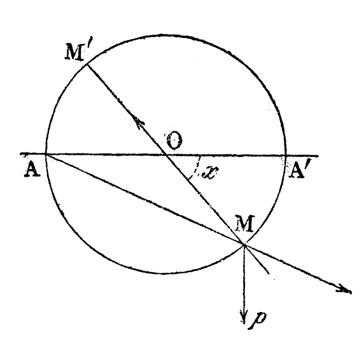
Pour exprimer analytiquement qu'il y a équilibre, on peut, comme pour les surfaces, opérer de deux manières : Ou bien projeter sur la tangente les forces qui agissent sur le point et exprimer que la somme algébrique des projections est nulle, ce qui définit la position d'équilibre ; puis projeter sur deux axes menés par le point dans le plan normal, ce qui définit la pression et par suite la réaction. Ou bien traiter le point comme un point matériel libre, en lui appliquant une force N égale à

la réaction, et dont la grandeur ainsi que la direction sont déterminées ultérieurement par les équations d'équilibre.

Nous allons donner une application.

82. Application à un exemple ; équilibre stable ou instable. — *Un point matériel pesant, de poids p, est assujetti à rester sur un cercle vertical* OA *et est repoussé par le point* A *proportionnellement à la distance ; trouver les positions d'équilibre.*

Soit M une position d'équilibre. Prenons comme inconnue l'angle $A'OM = x$, compté positivement dans le sens de A′ vers M, et prenons comme sens positif sur la tangente en M le sens des arcs positifs. Le point M est soumis à l'action de trois forces : son poids p, dirigé suivant la verticale ; la répulsion du point A, dirigée suivant AM et que nous représenterons par $\mu.AM$; et enfin la réaction du cercle, dirigée vers le centre. Nous obtiendrons la condition de l'équilibre, c'est-à-dire par suite la position d'équilibre en écrivant que la somme algébrique des projections de ces trois forces sur la tangente en M est nulle. Si l'on appelle F cette somme, comptée positivement dans le sens des arcs positifs, on obtient facilement



$$(1) \qquad F = p \cos x - \mu R \sin x,$$

R désignant le rayon du cercle. La position d'équilibre sera donc définie par l'équation

$$p \cos x - \mu R \sin x = 0,$$

d'où l'on tire
$$\operatorname{tg} x = \frac{p}{\mu R}.$$

Il y a deux valeurs de x comprises entre 0 et 2π satisfaisant à cette équation, et si l'on appelle α la plus petite, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, l'autre est $\pi + \alpha$; il en résulte qu'il y a

deux positions d'équilibre M et M' diamétralement opposées.

Supposons que le point matériel soit abandonné à lui-même en n'importe quel point du cercle ; la force tangentielle qui produit le mouvement est donnée par l'équation (1) et peut être exprimée par l'une quelconque des égalités

$$(2) \qquad F = \mu R \cos x(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} x),$$

$$(3) \qquad F = \mu R \cos x[\operatorname{tg} (\pi + \alpha) - \operatorname{tg} x].$$

Supposons alors en premier lieu que le point matériel soit très voisin du point M, c'est-à-dire que a soit très voisin de α ; l'équation (2) montre que si x est inférieur à α, F est positive, tandis que si x est supérieur à α, F est négative. Il en résulte que si l'on écarte le point matériel de sa position d'équilibre M, correspondant à l'angle α, la force F tend à l'y ramener. Pour cette raison on dit que M est une *position d'équilibre stable.*

Supposons en second lieu que x soit très voisin de $\pi + \alpha$, c'est-à-dire que l'on écarte le point matériel de sa position d'équilibre M' correspondant à l'angle $\pi + \alpha$. Comme le premier facteur de l'équation (3) est alors négatif, on voit que la force F est positive ou négative suivant que x est supérieur ou inférieur à $\pi + \alpha$; il en résulte que dans ce cas la force F tend à éloigner le point de sa position d'équilibre quand on l'en écarte légèrement ; on dit alors que M' est *une position d'équilibre instable.*

Il nous reste à calculer la réaction du cercle ou, ce qui revient au même, la pression du point sur le cercle, pression qui est égale et contraire à la réaction. Calculons la réaction N comptée positivement vers le centre du cercle. Pour cela, projetons les trois forces N, p et μ.AM sur le rayon MO ; il vient, en exprimant que la somme algébrique des projections est nulle,

$$N - p \sin x - 2\mu R \cos^2 \frac{x}{2} = 0,$$

équation dans laquelle x est défini par la relation trouvée

plus haut :

$$\operatorname{tg} x = \frac{p}{\mu R}.$$

On en conclut successivement

$$N = p \sin x + 2\mu R \cos^2 \frac{x}{2}$$

et

$$N = \mu R \pm \sqrt{p^2 + \mu^2 R^2},$$

le signe + convenant au point M et le signe — au point M′

CHAPITRE V

COMPOSITION D'UN SYSTÈME DE FORCES PARALLÈLES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE; CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

83. **Composition de deux forces parallèles et de même sens.** — **Théorème.** — *La résultante de deux forces parallèles et de même sens, appliquées en deux points* A *et* B *d'un corps solide, est une force parallèle et de même sens qu'elles, égale à leur somme, et son point d'application* C, *situé entre* A *et* B, *partage la ligne* AB *dans le rapport inverse des forces.*

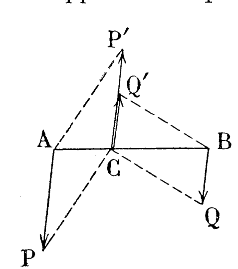
Soient P et Q les deux forces et soit C le point de AB, situé entre A et B, et tel que l'on ait

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \qquad AC \times P = CB \times Q.$$

Supposons le point C invariablement lié aux deux points A et B, puis appliquons en ce point les forces P′ et Q′ respectivement égales et de sens contraires à P et à Q. Ces deux forces ont une résultante égale à $P' + Q'$ ou à $P + Q$ et de sens contraire à P et à Q ; le théorème sera démontré si l'on prouve qu'elles font équilibre à P et à Q.



Or, les deux forces P et P′ définissent un couple dont le moment est égal à l'aire du parallélogramme PCP′A, c'est-à-dire au double de l'aire du triangle PAC ; de même Q et Q′ définissent un couple dont le moment est égal au double de l'aire du triangle QBC. Tout revient évidemment à prouver que ces deux couples se font équilibre ; mais ils sont de sens contraires, donc tout revient à prouver que leurs

moments sont égaux, c'est-à-dire que les triangles QBC et PAC sont équivalents. Mais les angles A et B de ces triangles étant supplémentaires, on sait que l'on a

$$\frac{\text{aire PAC}}{\text{aire QBC}} = \frac{AC \times AP}{BC \times BQ} = \frac{AC \times P}{BC \times Q}.$$

Or, le dernier rapport est égal à l'unité en vertu de l'égalité (1); donc les deux triangles sont équivalents, et le théorème est démontré.

84. **Corollaire.** — *Si* R *est la résultante des deux forces* P *et* Q, *chacune des trois forces* P, Q, R *est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres.*

De l'égalité (1) on tire en effet

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AC+BC},$$

c'est-à-dire, puisque $R = P + Q$ et $AC + BC = AB$,

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}. \tag{2}$$

85. **Décomposition d'une force en deux autres parallèles et de même sens.** — Les formules (2) permettent de décomposer une force R en deux autres parallèles et de même sens. Supposons en particulier que l'on veuille décomposer la force R, appliquée en C, en deux autres dont l'une, P, soit connue, ainsi que son point d'application A. On a alors

$$Q = R - P,$$

et les deux premiers rapports (2) donnent

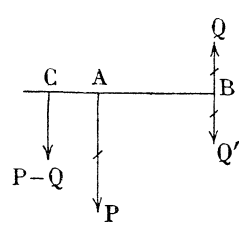
$$BC = AC \times \frac{P}{Q},$$

égalité qui définit la position du point d'application B de la force Q.

86. **Composition de deux forces parallèles et de sens contraires. — Théorème.** — *La résultante de deux forces parallèles et de sens contraires, appliquées en deux points* A *et* B *d'un corps solide, est une force parallèle aux deux premières, égale à*

leur différence, de même sens que la plus grande, et dont le point d'application C, *situé sur la droite* AB *prolongée, partage cette droite dans le rapport inverse des forces.*

Soient P et Q les deux forces qu'il s'agit de composer. Ces deux forces n'ont pas la même intensité, sans cela elles seraient en équilibre ou formeraient un couple suivant que AB serait ou ne serait pas leur ligne d'action ; par suite il n'y aurait pas lieu d'en chercher la résultante. Supposons donc $P > Q$ et décomposons la force P en deux autres de même sens dont l'une, Q′, soit de même intensité que Q et appliquée au point B ; alors l'autre, égale à $P - Q$, sera appliquée en un point C tel (85) que



$$AC = AB \times \frac{Q}{P - Q}. \qquad (3)$$

Mais les deux forces Q et Q′ se faisant évidemment équilibre, on peut les supprimer et il ne reste plus que la force $P - Q$, qui satisfait bien à toutes les conditions énoncées plus haut. En effet :

1° Elle est parallèle à P et de même sens qu'elle ;

2° Son point d'application, C, est sur le prolongement de AB ;

3° De l'égalité (3) on déduit les égalités

$$\frac{Q}{AC} = \frac{P - Q}{AB} = \frac{P}{BC},$$

qui expriment que le point C partage AB dans le rapport inverse des forces, et, en outre, que *chacune des trois forces est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres.*

87. Remarque I. — Les deux théorèmes précédents peuvent être réunis en un seul, moyennant les deux conventions suivantes :

1° Sur une droite indéfinie parallèle aux deux forces fixons

un sens positif et un sens négatif ; puis convenons d'affecter du signe + l'intensité de la force dirigée dans le sens positif et du signe — l'intensité de l'autre ;

2° Convenons aussi de considérer le rapport $\frac{AC}{CB}$ comme positif ou négatif suivant que le point C est situé entre A et B ou sur le prolongement de la droite AB.

Grâce à ces deux conventions, la résultante R de deux forces parallèles, P et Q, est définie en grandeur et sens par l'équation

$$R = P + Q,$$

pourvu que $P + Q$ ne soit pas nulle.

Son point d'application est défini par l'égalité

$$\frac{AC}{CB} = \frac{Q}{P}.$$

Si l'on convient de plus de fixer un sens positif et un sens négatif sur la droite AB, on a dans tous les cas, en grandeur et en signe,

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB},$$

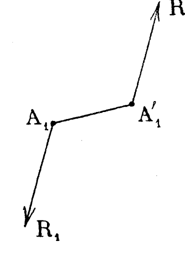
l'ordre des lettres qui figurent au dénominateur devant d'ailleurs être respecté.

La vérification de ces divers résultats n'offrant aucune difficulté, nous laisserons au lecteur le soin de la faire.

88. Remarque II. — Il est clair, d'après cela, que le point d'application de la résultante de deux forces parallèles ne change pas, soit quand on change la direction commune des forces, soit quand on fait varier les forces de manière que leur rapport soit constant, car le point d'application est indépendant de la direction des forces et ne dépend que de leur rapport.

89. **Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles de directions quelconques.** — La règle de composition d'un nombre quelconque de forces parallèles est une conséquence

immédiate de ce qui précède. Considérons d'abord le cas de forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$, parallèles et de même sens. On obtiendra leur résultante en composant d'abord F_1 avec F_2, puis la résultante obtenue avec F_3, et ainsi de suite.



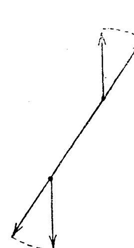
Considérons maintenant le cas où, en même temps que des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dirigées dans un sens, il y en a d'autres $F'_1, F'_2, \ldots, F'_p$ dirigées en sens contraire. Soit R_1 la résultante des forces $F_1, \ldots, F_n$, obtenue comme il vient d'être dit ; soit de même R'_1 la résultante des forces $F_1, F'_2, \ldots, F'_p$.

1° Si R_1 et R'_1 n'ont pas la même intensité, elles ont une résultante unique qu'on sait déterminer (87), et c'est la résultante du système.

2° Si les intensités sont égales, il y a deux cas à examiner suivant que la distance A_1A_1 des deux points d'application est nulle ou différente de zéro.

Dans le premier cas, les deux forces R_1 et R'_1 étant égales et opposées, se font équilibre. Cet équilibre ne cesse pas de subsister quand on change la direction commune des forces, sans changer leur sens ; on dit alors, pour cette raison, que le corps soumis à l'action de ces forces est en équilibre *astatique*.

Dans le second cas, les deux forces R_1 et R'_1 forment un couple si elles ne sont pas dirigées suivant la droite qui joint leurs points d'application ; alors le système n'a pas de résultante. Elles sont en équilibre si elles sont dirigées suivant la droite qui joint leurs points d'application ; seulement l'équilibre est rompu quand on change leur direction commune, et l'on dit, pour cette raison, qu'il est *statique*.



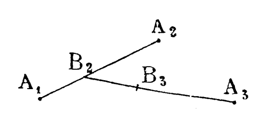
Ajoutons, pour terminer, que si l'on convient de considérer comme positives les forces dirigées dans un sens, comme négatives les autres, la résultante R d'un système de forces parallèles $f_1, f_2, \ldots, f_n$

est définie en grandeur et sens par l'équation

$$R = f_1 + f_2 + \cdots + f_i + \cdots + f_m = \Sigma f_i.$$

90. **Centre des forces parallèles.** — Lorsque des forces parallèles, $f_1, f_2, \ldots, f_m$, dirigées ou non dans le même sens, ont une résultante, cette résultante est unique (38), et son point d'application s'appelle le *centre* des forces parallèles.

Supposons les forces $f_1, f_2, \ldots, f_m$ appliquées respectivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_m$; fixons un sens positif et un sens négatif sur une droite quelconque parallèle aux forces, et convenons d'affecter du signe + les intensités des forces dirigées dans le sens positif, du signe — celles des autres. Quelle que soit la manière d'effectuer la composition, la résultante ne change pas. Par conséquent, pour obtenir le centre des forces parallèles, nous pouvons opérer de la manière suivante :



Nous pouvons déterminer d'abord le point d'application B_2 de la résultante P_2 des forces f_1 et f_2 : ce point est défini par l'égalité

$$\frac{A_1B_2}{B_2A_2} = \frac{f_2}{f_1},$$

qui a lieu en grandeur et en signe. On a d'ailleurs, en grandeur et signe,

$$P_2 = f_1 + f_2.$$

Nous pouvons ensuite déterminer le point d'application B_3 de la résultante P_3 des forces P_2 et f_3 : ce point est défini par l'égalité

$$\frac{B_2B_3}{B_3A_3} = \frac{f_3}{P_2},$$

qui a lieu en grandeur et en signe. On a d'ailleurs, en grandeur et signe,

$$P_3 = P_2 + f_3 = f_1 + f_2 + f_3;$$

et nous pouvons continuer ainsi jusqu'à ce que toutes les forces aient été employées. La seule précaution à prendre consiste à associer les forces dans un ordre tel qu'aucune des résultantes partielles $P_1, P_2, \ldots$ ne soit nulle.

Il suit évidemment de là que la construction du centre d'un système de forces parallèles est identique à la construction du centre des distances proportionnelles du système de points A_1, A_2, ..., A_m, affectés des coefficients respectifs

$$f_1, f_2, \dots, f_m.$$

On en conclut :

1° *Que le centre des forces parallèles ne change pas quand on fait pivoter toutes les forces autour de leurs points d'application, de manière à les maintenir parallèles et à conserver leurs sens respectifs et leurs grandeurs ;*

2° *Que le centre des forces parallèles ne change pas non plus quand on fait varier toutes les forces de manière que leurs rapports mutuels demeurent constants, c'est-à-dire quand on multiplie ou que l'on divise les intensités de toutes les forces par le même nombre.*

La première de ces deux propositions est évidente, et quant à la deuxième, elle résulte de ce que les points B_2, B_3, ... ne changent pas si, au lieu des forces f_1, f_2, ..., f_m, on avait à composer λf_1, λf_2, ..., λf_m, λ désignant un nombre quelconque.

91. **Détermination analytique de la résultante.** — La considération du centre des forces parallèles comme centre des distances proportionnelles d'un système de points va nous permettre d'effectuer simplement la détermination analytique de la résultante de ces forces. Rapportons en effet le système à trois axes de coordonnées rectangulaires ou non et appelons x_i, y_i, z_i les coordonnées du point d'application de la force f_i, x, y, z celles du point d'application de la résultante, en supposant, bien entendu, qu'il y en ait une. On a alors, en vertu des formules établies numéro 3,

$$(4) \qquad x = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}, \qquad y = \frac{\Sigma f_i y_i}{\Sigma f_i}, \qquad z = \frac{\Sigma f_i z_i}{\Sigma f_i}.$$

Discussion. — Pour discuter ces formules et pour en déduire les conditions d'équilibre, il est indispensable de séparer les forces en deux groupes : les forces dirigées dans le sens

adopté comme sens positif, et les autres. Nous appellerons les premières les forces *positives*, et les autres les forces *négatives*. Soient $F_1, F_2, \ldots, F_p$ les forces positives ; a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 etc. les coordonnées de leurs points d'application respectifs. Soient de même $F'_1, F_2, \ldots, F'_n$ les forces négatives ; $a'_1, b_1, c'_1, \quad a_2, b'_2, c_2$, etc. les coordonnées de leurs points d'application respectifs. La résultante F des forces positives est égale à $F_1 + F_2 + \ldots + F_p$, et les coordonnées a, b, c de son point d'application A sont données par les formules

$$(5) \qquad a = \frac{\Sigma F_\alpha . a_\alpha}{F}, \qquad b = \frac{\Sigma F_\alpha . b_\alpha}{F}, \qquad c = \frac{\Sigma F_\alpha . c_\alpha}{F}.$$

Pareillement, la résultante F' des forces négatives est égale à $F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_n$, et les coordonnées a', b', c' de son point d'application A' sont données par les formules

$$(6) \qquad a' = \frac{\Sigma F'_\beta a'_\beta}{F'}, \qquad b' = \frac{\Sigma F'_\beta b'_\beta}{F'}, \qquad c' = \frac{\Sigma F'_\beta c'_\beta}{F'}.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$(7) \qquad \begin{cases} \Sigma f_i x_i = \Sigma F_\alpha a_\alpha + \Sigma F'_\beta a_\beta, \\ \Sigma f_i y_i = \Sigma F_\alpha b_\alpha + \Sigma F'_\beta b'_\beta, \\ \Sigma f_i z_i = \Sigma F_\alpha c_\alpha + \Sigma F'_\beta c'_\beta. \end{cases}$$

On a enfin

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_m = F + F'.$$

Cela posé :

1er Cas. — Si $F + F' \neq 0$, il y a une résultante unique égale à $F + F'$ et dont le point d'application, centre des forces parallèles, est défini soit par les formules (4), soit par les formules

$$x = \frac{aF + a'F'}{F + F'}, \qquad y = \frac{bF + b'F'}{F + F'}, \qquad z = \frac{cF + c'F'}{F + F'},$$

qui expriment que ce point est le point d'application de la résultante des forces F et F'.

2e Cas. — Si $F + F' = 0$, le cas se subdivise en trois autres :

1° Si les points A et A' coïncident, le système est en équi-

libre *astatique* (89), et les conditions pour qu'on ait ce genre d'équilibre sont, avec $F + F' = 0$, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$. Si l'on remplace a, b, c, a', b', c' par leurs valeurs (5) et (6) et si l'on tient compte à la fois de $F' = -F$ et des identités (7), il vient, pour les conditions analytiques de l'équilibre astatique,

$$(8) \quad \Sigma f_i = 0, \quad \Sigma f_i x_i = 0, \quad \Sigma f_i y_i = 0, \quad \Sigma f_i z_i = 0.$$

2° Si les points A et A′ sont distincts et que la droite AA′ soit la ligne d'action des forces F et F′, le système est en équilibre *statique* (89). Cherchons les conditions pour qu'on ait ce genre d'équilibre. Pour cela, appelons p, q, r les paramètres directeurs de la direction commune des forces et exprimons que cette direction est parallèle à AA′, qui a pour paramètres directeurs $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$; nous obtenons ainsi, pour les conditions cherchées,

$$\frac{a - a'}{p} = \frac{b - b'}{q} = \frac{c - c'}{r},$$

auxquelles il faut, bien entendu, joindre $F + F' = 0$. En remplaçant a, b, c, a', b', c' par leurs valeurs (5) et (6), puis en tenant compte de $F' = -F$ et des identités (7), on obtient finalement les conditions

$$(9) \quad F + F' = \Sigma f_i = 0, \qquad \frac{\Sigma f_i x_i}{p} = \frac{\Sigma f_i y_i}{q} = \frac{\Sigma f_i z_i}{r}.$$

Le nombre des conditions, qui était égal à quatre dans le cas précédent, se réduit maintenant à trois, qui deviennent

$$\Sigma f_i = 0, \qquad \Sigma f_i x_i = 0, \qquad \Sigma f_i y_i = 0,$$

lorsque les forces sont parallèles à Oz ; car alors on a

$$p = 0, \qquad q = 0,$$

et, par suite, les numérateurs correspondants sont nuls.

3° Si enfin les points A et A′ sont distincts et si de plus AA′ n'est pas la ligne d'action des deux forces égales et opposées F et F′, on a un couple.

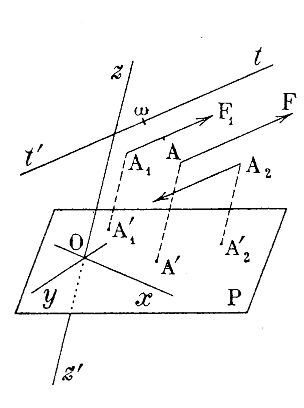
En résumé, *si l'on a* $\Sigma f_i \neq 0$, *on a une résultante unique ;*

Si l'on a $\Sigma f_i = 0$, *les forces se réduisent à un couple ;*

Si l'on a les équations (9), *il y a équilibre statique ;*
Et si l'on a les équations (8), *il y a équilibre astatique.*

92. Remarque. — Comme on le voit, il faut plus de conditions pour réaliser l'équilibre astatique que pour réaliser l'équilibre statique ; si donc un système de forces parallèles est en équilibre, cet équilibre est généralement statique.

93. **Moments des forces parallèles par rapport à un plan.** — Considérons un plan P, une droite indéfinie zz' rencontrant le plan P, et une autre droite indéfinie quelconque tt'. Sur chacune de ces droites, fixons un sens positif et un sens négatif : soit Oz le sens positif sur la première et soit ωt le sens positif sur la seconde. Appelons F l'intensité positive ou négative d'une force parallèle à tt', et z la cote $A'A$, positive ou négative, de son point d'application, A; cette cote, prise par rapport au plan P, parallèlement à zz', est d'ailleurs, par convention, positive si le sens de A' vers A est le même que le sens de O vers z, négative dans le cas contraire.



On appelle *moment* de la force F par rapport au plan P et parallèlement à $z'z$, le produit Fz de l'intensité par la cote : ce produit, en vertu de la définition même, est un nombre positif ou négatif dont le signe résulte du signe de chacun des facteurs F et z.

94. **Théorème.** — *Le moment, par rapport à un plan et parallèlement à une direction quelconque, de la résultante d'un système de forces parallèles est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

Considérons en effet un système $F_1, F_2, \dots, F_n$ de forces parallèles à la direction tt', et supposons que l'on prenne les moments rapport au plan P, parallèlement à la direction $z'z$

(fig. précédente). Rapportons le système à trois axes Ox, Oy, Oz, dont deux, Ox et Oy, situés dans le plan P, et le troisième confondu avec $z'z$. Supposons d'ailleurs que les forces aient une résultante F appliquée en un point de cote z, et soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les cotes respectives des points d'application des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$. En vertu des formules (4) du numéro 91, la cote du point d'application de la résultante est donnée par la formule

$$z = \frac{\Sigma F_i z_i}{R}.$$

On tire de là l'égalité

$$Rz = \Sigma F_i z_i,$$

qui exprime le théorème énoncé.

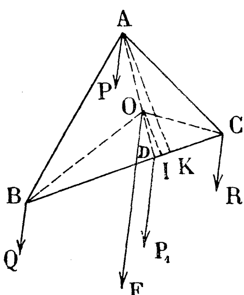
95. Remarque. — Comme on le voit, ce théorème est une conséquence immédiate des formules (4) du numéro 91. Aussi, à l'avenir, quand nous aurons à déterminer le centre d'un système de forces parallèles, nous dirons indifféremment que nous appliquons le théorème des moments (94) ou que nous appliquons les formules (4) du numéro 91.

96. **Décomposition d'une force en plusieurs autres parallèles à la première**. — Comme application de la théorie des forces parallèles, proposons-nous de décomposer une force en plusieurs autres qui lui soient parallèles, connaissant leurs points d'application. Nous avons déjà examiné le cas de la décomposition en deux ; examinons maintenant les autres cas.

Proposons-nous d'abord de décomposer une force F, appliquée en un point O, en trois autres, parallèles à F et appliquées respectivement en trois points A, B, C, dont le plan passe par le point O et n'est pas parallèle à la force F. Nous distinguerons deux cas, suivant que le point O est ou n'est pas intérieur au triangle ABC.

Supposons en premier lieu que le point O soit intérieur au triangle ABC et traçons la droite AO jusqu'à son point de rencontre D avec le côté BC. La force F peut être décomposée en deux autres parallèles à F, de même sens qu'elle, appliquées

respectivement en A et en D, et définies (84 et 85) par les égalités



$$\frac{F}{AD} = \frac{P}{OD} = \frac{P_1}{OA},$$

desquelles on déduit

$$\frac{F}{P} = \frac{AD}{OD};$$

mais les deux triangles ABC et OBC ayant la même base BC, le rapport de leurs aires est égal au rapport $\frac{AK}{OI}$ des hauteurs, et, par suite, au rapport $\frac{AD}{OD}$.

On a donc

$$\frac{F}{P} = \frac{ABC}{OBC},$$

d'où

(1) $$\frac{F}{ABC} = \frac{P}{OBC}.$$

La force P_1 appliquée au point D peut, de même, être décomposée en deux autres parallèles à P_1, de même sens qu'elle, appliquées respectivement en B et en C et telles que l'on ait

$$\frac{Q}{R} = \frac{DC}{BD}.$$

Mais si l'on considère les deux triangles AOC et AOB comme ayant même base OA, leur rapport est égal à $\frac{DC}{BD}$; on a donc

$$\frac{Q}{R} = \frac{AOC}{AOB},$$

et on en déduit

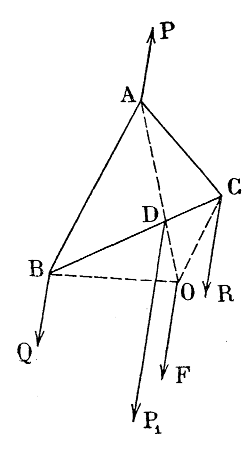
(2) $$\frac{Q}{OAC} = \frac{R}{OAB} = \frac{Q+R}{OAC+OAB} = \frac{F-P}{ABC-OBC}.$$

D'autre part, des égalités (1) on tire

(3) $$\frac{F-P}{ABC-OBC} = \frac{F}{ABC} = \frac{P}{OBC},$$

et, par suite, la comparaison des égalités (2) et (3) donne

$$(4) \qquad \frac{P}{OBC} = \frac{Q}{OAC} = \frac{R}{OAB} = \frac{F}{ABC},$$



ce qui détermine entièrement les trois composantes.

Supposons en second lieu que le point O soit extérieur au triangle ABC et soit, par exemple, dans l'angle A de ce triangle. En menant encore OA, on pourra décomposer la force F en deux autres, P et P_1, parallèles et de sens contraires, appliquées respectivement en A et en D ; on peut de même décomposer P_1 en deux autres, Q et R, parallèles et de même sens, appliquées respectivement en B et en C. Enfin, en raisonnant comme plus haut, on verra que ces forces satisfont encore aux relations (4).

Nous ne poursuivrons pas plus loin l'étude de cette question et nous nous bornerons à indiquer les deux remarques suivantes, faciles à vérifier :

1° Si la force F est située dans le plan ABC, on peut la décomposer d'une infinité de manières en trois forces parallèles appliquées en trois points donnés ;

2° Le problème de la décomposition de la force F en plus de trois forces parallèles dont on donne les points d'application admet aussi une infinité de solutions.



CHAPITRE VI

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ ; THÉORÈMES GÉNÉRAUX

97. Centre de gravité d'un corps. — L'observation montre que tout corps abandonné à lui-même *tombe* suivant la verticale ; il est donc sollicité par une force agissant suivant la même direction ; cette force s'appelle la *pesanteur,* et l'on dit qu'un corps est *pesant* pour exprimer qu'il est soumis à l'action de la pesanteur.

Cette action se manifeste d'ailleurs différemment suivant les cas : par la chute du corps si celui-ci est libre ; par la tension du fil s'il est suspendu à un fil ; par la pression qu'il exerce sur un autre corps quand il s'appuie sur lui. Elle s'exerce enfin sur tous également, quelque petites qu'en soient les dimensions ; car, si un corps est partagé en autant de parties que l'on veut, toutes sont pesantes et tombent également vite dans le vide.

On est ainsi conduit à considérer un corps comme formé d'une infinité de points matériels sur chacun desquels s'exerce une force verticale, son poids. Si ses dimensions sont très petites par rapport à la terre, toutes ces forces verticales sont sensiblement parallèles et de même sens ; dès lors elles ont une résultante unique appliquée au centre des forces parallèles. Cette résultante s'appelle le *poids* du corps et son point d'application le *centre de gravité.*

Le centre des forces parallèles est, comme on sait, indépendant de la direction commune des forces; il ne dépend que de leurs points d'application et de leurs intensités ; il ne change pas quand on altère toutes les forces dans le même rapport. Dans le cas actuel, il est vrai, la direction des forces est fixe ; mais elle change avec l'orientation du corps dans l'espace par rapport à un observateur qui serait entraîné avec

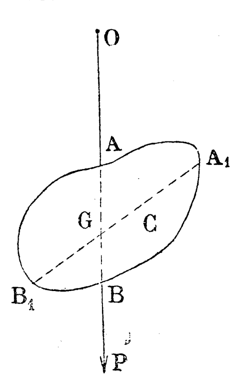
lui, tandis que la position du centre de gravité ne change pas. Ainsi le centre de gravité est un point fixe du corps quelle que soit son orientation. Il est fixe également quand on déplace le corps à la surface de la terre, bien que les actions de la pesanteur sur ses diverses parties changent avec la latitude, car elles sont toutes altérées dans le même rapport.

Supposons le corps rapporté à trois axes de coordonnées, et soient $p_1, p_2, \ldots$ les poids des diverses parties de ce corps, appliqués respectivement aux points $A_1, A_2, \ldots$. Appelons x_i, y_i, z_i les coordonnées du point A_i, x, y, z celles du centre de gravité G ; puisque le point est le centre des forces parallèles $p_1, p_2, \ldots$, on a (91)

$$x = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma p_i}, \qquad y = \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma p_i}, \qquad z = \frac{\Sigma p_i z_i}{\Sigma p_i}.$$

Ces formules se réduisent à deux si tous les points $A_1, A_2, \ldots$ sont dans le même plan et sont rapportés à deux axes de ce plan ; elles se réduisent à une si tous les points sont en ligne droite et si l'on prend cette droite pour axe des abscisses. Prises individuellement, elles font connaître la distance du centre de gravité à un plan quelconque parallèlement à une direction quelconque. Rappelons enfin, pour ne pas avoir à y revenir, qu'on les obtient en remarquant que le centre des forces parallèles $p_1, p_2, \ldots$ n'est autre chose que le centre des distances proportionnelles de leurs points d'application, affectés des coefficients respectifs $p_1, p_2, \ldots$

98. **Détermination expérimentale du centre de gravité.** — Soit C le corps ; on le suspend à un fil OA par un de ses points A. Il est alors en équilibre sous l'action de deux forces, son poids P, appliqué au centre de gravité G, et la tension du fil, dirigée suivant AO ; donc le prolongement AB de OA passe par G. Imaginons qu'on marque cette direction dans le corps, puis suspendons-le par un autre point, A_1 : nous obtiendrons une nouvelle direction, A_1B_1,



passant également par le point G ; ce point sera ainsi défini par l'intersection de deux directions AB et A_1B_1 marquées dans le corps.

99. Remarques. — 1° Dans la pratique on ne peut pas marquer les directions AB et A_1B_1 dans le corps ; mais l'expérience précédente fournit en général des renseignements suffisants sur la position du centre de gravité.

2° Dans tout ce qui suit on traitera du centre de gravité, non des corps, mais des volumes, des surfaces et des lignes.

100. **Définitions.** — On dit qu'un corps est *homogène* quand les poids de ses différentes parties sont proportionnels à leurs volumes. Tout corps qui ne satisfait pas à cette condition est dit *hétérogène*.

On appelle *centre de gravité d'un volume* celui d'un corps homogène qui remplirait ce volume ;

Centre de gravité d'une surface, celui d'une couche d'épaisseur constante et infiniment petite d'un corps homogène répandu sur cette surface ;

Centre de gravité d'une ligne, celui d'un corps homogène ayant la forme d'un tube de section constante et infiniment petite et qui aurait pour axe cette ligne.

Ainsi, pour concevoir le centre de gravité d'un volume, d'une surface ou d'une ligne, on peut imaginer qu'à chaque élément est appliqué un poids proportionnel à son volume, sa surface ou sa longueur ; le point d'application de la résultante de tous ces poids est le centre de gravité du volume, de la surface ou de la ligne. Nous conviendrons d'ailleurs, une fois pour toutes, de mesurer ces poids par les mêmes nombres que les éléments auxquels ils se rapportent.

101. **Définitions.** — Nous renverrons aux ouvrages de géométrie élémentaire pour l'étude de *deux* figures symétriques par rapport à un point, à un axe ou à un plan ; rappelons toutefois que, dans deux figures symétriques, les lignes, les surfaces et les volumes correspondants ont des *mesures* égales.

On dit qu'une figure est symétrique par rapport à un centre,

à un axe ou à un plan, lorsque ses points sont deux à deux symétriques par rapport à ce point, cet axe ou ce plan.

102. **Théorème.** — *Si une figure quelconque, volume, surface, ligne ou ensemble de points a un centre, un axe ou un plan de symétrie, son centre de gravité est en ce centre, sur cet axe ou dans ce plan.*

En effet, on peut décomposer la figure en éléments deux à deux symétriques et équivalents ; par suite, les poids de deux éléments symétriques sont égaux et le point d'application de leur résultante est au milieu de la droite qui les joint, c'est-à-dire au centre, sur l'axe ou dans le plan de symétrie. Le point d'application de la résultante totale, c'est-à-dire le centre de gravité, satisfait donc aussi à la même condition.

D'après cela, le centre de gravité d'une portion de droite est au milieu de cette portion de droite ; celui d'un parallélogramme coïncide avec le centre du parallélogramme, etc.

Pour généraliser ce théorème, nous allons d'abord donner quelques notions qui ne se trouvent pas habituellement dans les cours de géométrie.

103. **Définitions.** — On dit qu'une droite est un *diamètre* d'une figure plane si les points de cette figure peuvent être groupés deux à deux de manière que les droites qui joignent les points correspondants soient parallèles et coupées en leurs milieux par la droite.

On dit de même qu'un plan est un *plan diamétral* d'une figure si les points de cette figure peuvent être groupés deux à deux de façon que les droites qui joignent les points correspondants soient parallèles et coupées en leurs milieux par le plan.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les deux propositions suivantes :

1° *Si une figure plane a un diamètre, des portions de surfaces correspondantes sont équivalentes ;*

2° *Si une figure a un plan diamétral, deux volumes correspondants sont équivalents.*

Ces deux propositions sont indispensables pour démontrer en toute rigueur le théorème suivant :

104. **Théorème.** (Extension du théorème numéro 102.) — *Si une aire plane admet un diamètre, si un volume admet un plan diamétral, le centre de gravité de cette aire ou de ce volume est sur le diamètre ou dans le plan diamétral.*

En effet l'aire plane, par exemple, peut être décomposée en éléments correspondants ; les poids de deux éléments correspondants étant égaux, le point d'application de leur résultante est au milieu de la droite qui les joint, c'est-à-dire sur le diamètre ; donc le point d'application de la résultante totale, c'est-à-dire le centre de gravité de l'aire plane est aussi sur ce diamètre.

On raisonnerait de même dans le cas du plan diamétral.

105. Remarque I. — Le centre de gravité d'une ligne qui a un diamètre n'est pas forcément sur ce diamètre, parce que les éléments correspondants n'ayant pas en général même longueur, le raisonnement précédent est en défaut. Ainsi on verra plus loin que le centre de gravité de l'aire d'un triangle est sur une médiane parce qu'une médiane est un diamètre de ce triangle ; tandis que le centre de gravité du périmètre n'y est pas.

De même le centre de gravité d'une surface qui a un plan diamétral n'est pas nécessairement dans ce plan.

106. Remarque II. — Les deux propositions suivantes peuvent être regardées comme évidentes :

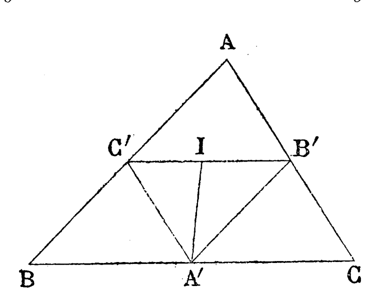
1° *Si tous les points d'une ligne ou d'une aire planes décrivent des droites égales et parallèles, le centre de gravité décrit une droite égale et parallèle aux premières* ;

2° *Les centres de gravité des lignes ou des aires planes homothétiques à une ligne ou à une aire données sont distribués sur la même droite passant par le centre d'homothétie*

CHAPITRE VII

CENTRES DE GRAVITÉ DE LIGNES

107. **Contour d'un triangle.** — **Théorème.** — *Le centre de gravité du contour d'un triangle est le point de rencontre des bissectrices du triangle qui a pour sommet les milieux des côtés du premier.*



Soit le triangle ABC ; le centre de gravité du contour de ce triangle s'obtient en composant trois forces parallèles et de même sens, égales aux côtés a, b, c et appliquées respectivement en leurs milieux A′, B′, C′. La résultante des deux forces b et c est une force $b+c$ appliquée en un point I situé entre B′ et C′ et tel que l'on ait

$$\frac{C'I}{IB'} = \frac{b}{c} = \frac{2A'C'}{2A'B'}$$

ou

$$\frac{C'I}{IB'} = \frac{A'C'}{A'B'}.$$

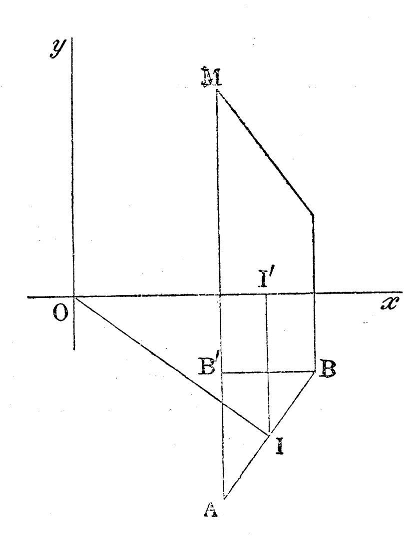
Il suit de là que le point I est sur la bissectrice de l'angle B′A′C′ ; mais alors le centre de gravité qui s'obtient en composant les deux forces a et $b+c$ est lui-même sur cette bissectrice ; il en résulte qu'il est à l'intersection des trois bissectrices.

108. **Corollaire.** — *Les bissectrices d'un triangle concourent en un même point.*

109. **Contour polygonal régulier.** — **Théorème.** — *Le centre de gravité d'une ligne brisée régulière convexe est sur le rayon*

moyen à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre le périmètre, la corde et l'apothème.

Soient A et M les extrémités de la ligne brisée régulière de centre O et de rayon R; désignons par c la corde AM, par L le périmètre de la ligne brisée et soit Ox le rayon moyen. Le centre de gravité se trouve évidemment sur Ox (102) et on l'obtient en composant des forces parallèles égales aux côtés de la ligne brisée et appliquées en leurs milieux. Rapportons alors la figure aux deux axes rectangulaires Ox et Oy et par le milieu I d'un côté quelconque, AB par exemple, menons II' perpendiculaire à Ox.



En appelant x l'abscisse du centre de gravité, on a (97)

$$x = \frac{\Sigma AB . OI'}{\Sigma AB} = \frac{\Sigma AB . OI'}{L}.$$

Menons BB' et AA' respectivement parallèles à Ox et à Oy; les deux triangles semblables ABB', OII' donnent

$$\frac{AB}{OI} = \frac{AB'}{OI'},$$

d'où
$$AB . OI' = AB' . OI ;$$

or, OI est l'apothème a de la ligne brisée, AB' est égale à la projection de AB sur Oy ; on aura donc

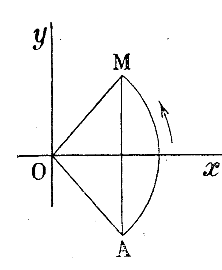
$$x = \frac{a \Sigma \text{ proj. } AB}{L};$$

mais d'autre part Σ proj. AB $= c$;

il vient donc finalement

$$x = \frac{ac}{L}.$$

110. **Arc de cercle. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'un arc de cercle est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale à la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.*



Soit l'arc de cercle AM, de centre O et de rayon R. Rapportons la figure au rayon moyen Ox et à la perpendiculaire Oy ; le centre de gravité sera évidemment sur Ox. Pour obtenir son abscisse ξ décomposons l'arc AM $=$ L en un très grand nombre d'arcs égaux dont les extrémités seront les sommets d'une ligne brisée régulière convexe, inscrite dans l'arc. Soient p le périmètre de cette ligne, a son apothème et c la corde AM. Nous venons de voir que le centre de gravité de cette ligne est sur le rayon Ox et que son abscisse x est donnée par la formule

$$x = \frac{ac}{p}.$$

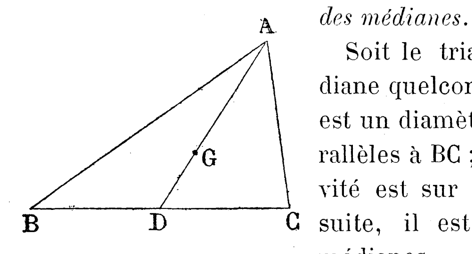
Mais, si l'on fait croître indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée, son centre de gravité a pour limite le centre de gravité de l'arc ; d'autre part x, a et p ont respectivement pour limites ξ, R et L. On aura donc

$$\xi = \frac{\mathrm{R}c}{\mathrm{L}}.$$

CHAPITRE VIII

CENTRES DE GRAVITÉ DE SURFACES

111. **Triangle. — Théorème.** — *Le centre de gravité de l'aire d'un triangle est au point de concours des médianes.*



Soit le triangle ABC. Une médiane quelconque, AD par exemple, est un diamètre pour les cordes parallèles à BC ; donc le centre de gravité est sur cette médiane et, par suite, il est à l'intersection des médianes.

112. **Corollaire.** — *Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point.*

113. **Théorème**. — *Le centre de gravité d'un triangle est le centre des moyennes distances de ses trois sommets.*

Cherchons en effet le point d'application de la résultante de trois poids égaux à P appliqués en A, B et C. Il faut pour cela composer d'abord les poids appliqués en B et C, ce qui donne un poids 2P appliqué au point D ; il reste ensuite à composer ce poids 2P avec le poids P appliqué en A, ce qui montre que le point d'application de la résultante, c'est-à-dire le centre des moyennes distances est situé sur la médiane AD ; il est donc à l'intersection des médianes et coïncide avec le centre de gravité.

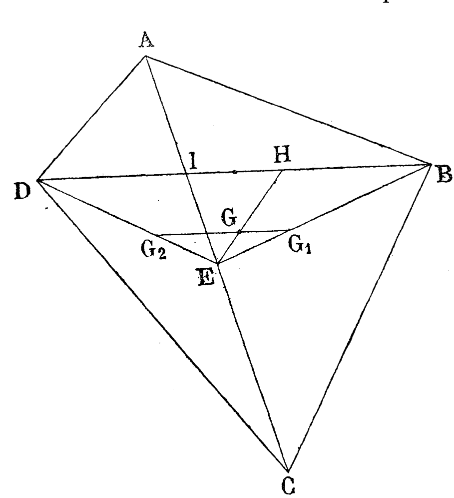
114. Remarque. — Soit G le centre de gravité ; puisqu'il est le point d'application de la résultante des poids 2P et P, appliqués en D et A, on a

$$\frac{GD}{GA} = \frac{1}{2},$$

d'où $$GD = \frac{1}{3} AD.$$

115. **Corollaire.** — *Les médianes d'un triangle se coupent au tiers de chacune d'elles à partir de la base.*

116. **Quadrilatère.** — Soit le quadrilatère ABCD. En décomposant d'abord le quadrilatère en deux triangles ABC et ADC, on voit que le centre de gravité du quadrilatère se trouve sur la ligne G_1G_2 qui joint les centres de gravité de ces deux triangles. On voit de la même manière qu'il se trouve sur la ligne qui joint les centres de gravité des deux triangles ABD et BCD ; par conséquent il est à l'intersection de ces deux lignes.



Autrement : soit G le centre de gravité cherché sur la ligne G_1G_2. Représentons par ABC le poids du triangle ABC et par ADC celui du triangle ADC ; on doit avoir

$$\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{ADC}{ABC}.$$

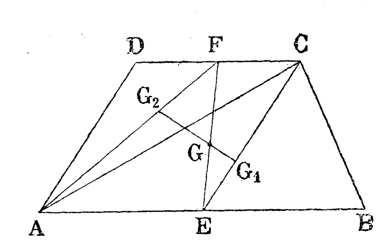
Mais le second rapport est évidemment égal à $\frac{DI}{BI}$. Si donc on prend $BH = DI$, on aura $DH = BI$ et

$$\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{BH}{HD};$$

comme G_1G_2 est parallèle à BD, il en résulte que le point G est à l'intersection des deux lignes EH et G_1G_2.

117. **Trapèze.** — Soit le trapèze ABCD. En le décomposant

en deux triangles ABC et ADC on voit que le centre de gravité cherché est sur la ligne G_1G_2 qui joint les centres de gravité de ces deux triangles ; mais il se trouve aussi sur la ligne EF qui joint les milieux des côtés parallèles, parce que cette ligne est un diamètre pour les cordes parallèles à ses côtés ; il est donc à l'intersection G de ces deux lignes.



118. Remarque. — On pourrait, bien entendu, obtenir le centre de gravité du trapèze en procédant comme pour un quadrilatère quelconque.

119. Remarque II. — On peut aussi obtenir le centre de gravité du trapèze en déterminant le rapport $\frac{GE}{GF}$. Pour cela, appelons a et b les bases AB et CD du trapèze et représentons par ABC, ACD les poids des triangles ABC et ACD mesurés par les surfaces des mêmes triangles. Considérons enfin le poids du trapèze appliqué en G comme la résultante des poids des triangles ABC, ADC appliqués respectivement en G_1 et G_2, et appliquons à ces trois forces parallèles le théorème des moments par rapport à un plan.

En prenant d'abord les moments parallèlement à EF par rapport à un plan passant par AB, on a

$$\mathrm{ABCD} \times \mathrm{GE} = \mathrm{ABC} \times \frac{\mathrm{EF}}{3} + \mathrm{ADC} \times \frac{2\mathrm{EF}}{3};$$

en prenant ensuite les moments parallèlement à la même direction par rapport à un plan passant par CD, on a de même

$$\mathrm{ABCD} \times \mathrm{GF} = \mathrm{ABC} \times \frac{2\mathrm{EF}}{3} + \mathrm{ADC} \times \frac{\mathrm{EF}}{3}.$$

On en déduit par division

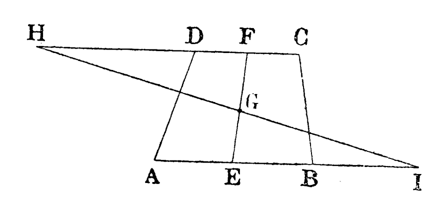
$$\frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{GF}} = \frac{\mathrm{ABC} + 2\mathrm{ADC}}{2\mathrm{ABC} + \mathrm{ADC}};$$

mais si l'on appelle h la hauteur du trapèze, on a

$$ABC = \frac{ah}{2}, \qquad ADC = \frac{bh}{2};$$

et l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{GE}{GF} = \frac{h(a+2b)}{h(2a+b)} = \frac{a+2b}{2a+b}.$$

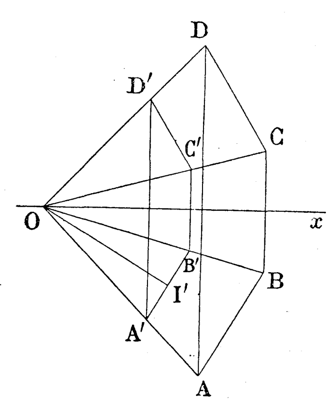


On déduit de là une nouvelle manière de déterminer le point G. On porte BI=DC, DH=AB; la droite IH rencontre EF au point G cherché. On a en effet

$$\frac{GE}{GF} = \frac{EI}{FH} = \frac{\frac{a}{2}+b}{a+\frac{b}{2}} = \frac{a+2b}{2a+b}.$$

120. **Secteur polygonal régulier. — Théorème. —** *Le centre de gravité de l'aire d'un secteur polygonal régulier est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale aux deux tiers de la quatrième proportionnelle entre le périmètre, la corde et l'apothème.*

Soit OABCD le secteur polygonal régulier. Décomposons-le en triangles AOB, BOC, ... et construisons la ligne brisée A'B'C'D' telle que



$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} = \frac{2}{3}.$$

Les poids des divers triangles AOB, BOC, ... qui composent le secteur sont évidemment proportionnels aux côtés A'B', B'C', ... et appliqués en leurs milieux. Le point d'application de leur résultante, c'est-à-dire le centre de gravité cherché, coïncide donc avec celui de la ligne brisée A'B'C'D'.

Soit alors Ox le rayon moyen et I′ le milieu d'un côté, A′B par exemple; en appelant ξ l'abscisse du centre de gravité sur le rayon moyen, on a (97)

$$\xi = OI' \times \frac{\text{corde } A'D'}{L'},$$

L′ désignant le périmètre de la ligne brisée A′B′C′D′; mais si l'on appelle a l'apothème de la ligne brisée ABCD, L son périmètre et c la corde AD, on a

$$OI' = \frac{2}{3}a \qquad \text{et} \qquad \frac{\text{corde } A'D'}{L'} = \frac{c}{L};$$

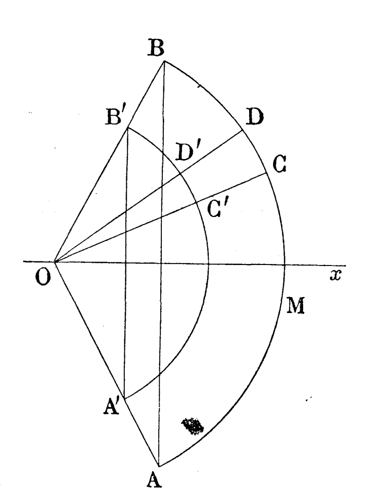
donc

$$\xi = \frac{2}{3}\frac{a.c}{L}.$$

121. Remarque. — Le centre de gravité d'une aire polygonale quelconque s'obtient en la décomposant en triangles.

122. Secteur circulaire. — Théorème. — *Le centre de gravité d'un secteur circulaire est sur le rayon moyen, à une distance du centre égale aux deux tiers de la quatrième proportionnelle entre l'arc, la corde et le rayon.*

Soit le secteur circulaire AOB de centre O et de rayon R; soient Ox le rayon moyen, c la corde AB et L l'arc AB. Pour obtenir le centre de gravité de ce secteur, décomposons-le en secteurs infiniment petits par des rayons OC, OD. Un quelconque de ces secteurs, COD par exemple, peut être assimilé à un triangle, car on peut considérer l'arc CD comme confondu avec sa corde; son centre de gravité sera donc sur la bissectrice de l'angle COD, à une distance du centre égale aux deux tiers du rayon; son poids, qui est égal à sa surface (100), est proportionnel à l'arc CD, ou encore proportionnel à l'arc C′D′ de rayon



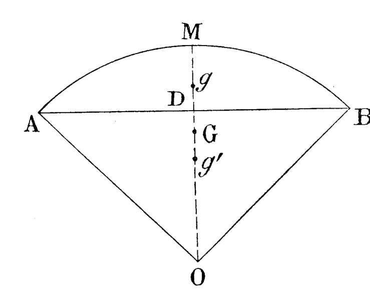
$R' = \frac{2}{3}R$. Il suit évidemment de là que le centre de gravité du secteur AOB coïncide avec celui de l'arc A'B' de rayon R'; mais celui-ci se trouve sur Ox, et son abscisse ξ est donnée par la formule

$$\xi = R' \frac{\text{corde A'B'}}{\text{arc A'B'}}.$$

On a donc
$$\xi = \frac{2}{3} \cdot \frac{Rc}{L}.$$

123. Remarque. — On aurait pu obtenir le centre de gravité du secteur circulaire en le considérant comme la limite d'un secteur polygonal régulier inscrit.

124. **Segment de cercle.** — Le centre de gravité g d'un segment de cercle AMB se trouve évidemment sur le rayon moyen OM, parce que ce rayon est un axe de symétrie du segment; il suit de là que la position du point g sera complètement définie par la distance Og. Pour trouver cette distance, appelons G et g' les centres de gravité respectifs du secteur circulaire OAMB et du triangle OAB; considérons ensuite le poids du secteur circulaire comme la résultante des poids du segment et du triangle, et appliquons à ces trois forces parallèles le théorème des moments par rapport au plan perpendiculaire en O au rayon OM et parallèlement à OM. Nous aurons ainsi



$$(1) \quad \text{Secteur OAMB} \times OG = \text{Triangle OAB} \times Og' + \text{Segment AMB} \times Og.$$

Appelons R le rayon du secteur, c la corde AB, et 2α l'angle AOB. On trouve sans difficulté

$$\text{Secteur OAMB} \times OG = R^2\alpha \times OG;$$

et, comme d'autre part on a (122)

$$OG = \frac{2}{3} \frac{Rc}{2R\alpha} = \frac{1}{3} \frac{c}{\alpha},$$

il vient $$\text{secteur OAMB} \times \text{OG} = \frac{1}{3} R^2 . c.$$

On a de même

$$\text{Triangle OAB} \times \text{O}g' = \frac{c}{2} R \cos \alpha \times \frac{2}{3} R \cos \alpha = \frac{1}{3} cR^2 \cos^2 \alpha.$$

Si donc on désigne par S la surface du segment, l'équation (1) donne

$$S \times \text{O}g = \frac{1}{3} cR^2 - \frac{1}{3} cR^2 \cos^2 \alpha$$

ou

$$(2) \qquad S \times \text{O}g = \frac{1}{3} cR^2 \sin^2 \alpha.$$

Or, dans le triangle rectangle OAD on a

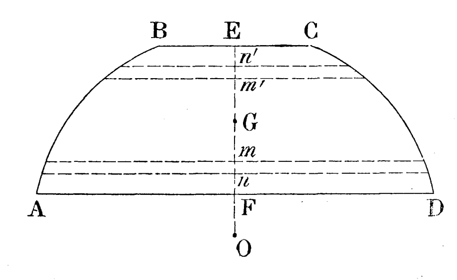
$$\text{AD} = \frac{c}{2} = R \sin \alpha ;$$

si alors on remplace $R \sin \alpha$ par $\frac{c}{2}$ dans l'équation (2), on en tire

$$\text{O}g = \frac{c^3}{12S}.$$

125. **Zone. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'une zone coïncide avec le milieu de la hauteur de la zone.*

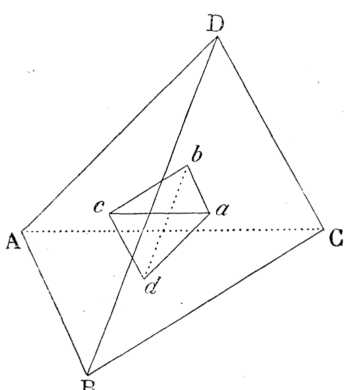
Considérons, en effet, dans une sphère de centre O, la zone déterminée par deux plans parallèles AD et BC. Il est tout d'abord évident que son centre de gravité se trouve sur le diamètre de la sphère perpendiculaire aux deux bases de la zone, parce que ce diamètre est un axe de symétrie de la zone ; je dis qu'elle coïncide avec le point G, milieu de la hauteur. Pour le prouver, je remarque que l'on peut partager la zone en couples de zones très petites, de même hauteur, telles que mn et $m'n'$, dont les plans de bases sont respectivement symétriques par rapport au point G. Ces deux zones ayant la même surface, ont le même poids.



Le poids de la première zone est appliqué entre m et n, celui de la seconde entre m' et n'; de sorte que si la hauteur commune tend vers zéro, ces deux poids égaux sont appliqués sur OG et en des points équidistants de G. Il suit de là que le centre de gravité de la zone est le point d'application d'un système de forces parallèles, deux à deux égales et dont les points d'application, distribués sur OG, sont deux à deux symétriques par rapport au point G; donc le centre de gravité d'une zone coïncide avec le milieu de sa hauteur.

126. **Surface du tétraèdre.** — **Théorème.** — *Le centre de gravité de la surface d'un tétraèdre coïncide avec le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre qui a pour sommets les centres de gravité des faces du tétraèdre donné.*

Soit le tétraèdre ABCD, dont les aires des faces respectives sont α, β, γ, δ; soient d'ailleurs a, b, c, d les centres de gravité des faces α, β, γ, δ. Le centre de gravité cherché est le point d'application de la résultante de quatre forces verticales appliquées respectivement en a, b, c, d, et dont les valeurs respectives sont α, β, γ, δ. Soit I le point d'application des forces α et β; on a



$$\frac{a\mathrm{I}}{\mathrm{I}b} = \frac{\beta}{\alpha}; \qquad (1)$$

mais les deux tétraèdres $abcd$ et ABCD étant semblables, on a

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\text{surface } acd}{\text{surface } bcd}. \qquad (2)$$

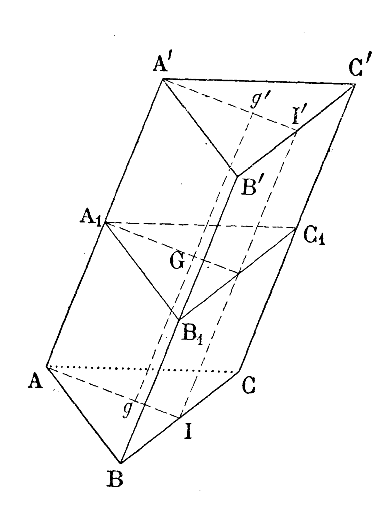
La comparaison des égalités (1) et (2) montre alors que le point I est sur le plan bissecteur du dièdre cd. Or, ce plan bissecteur contient les points c et d où sont appliquées les forces γ et δ; donc le centre de gravité de la surface du tétraèdre ABCD est situé dans ce plan bissecteur; donc enfin il est confondu avec le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre $abcd$.

CHAPITRE IX

CENTRES DE GRAVITÉ DE VOLUMES

127. **Prisme. — Théorème.** — *Le centre de gravité d'un prisme triangulaire est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des bases.*

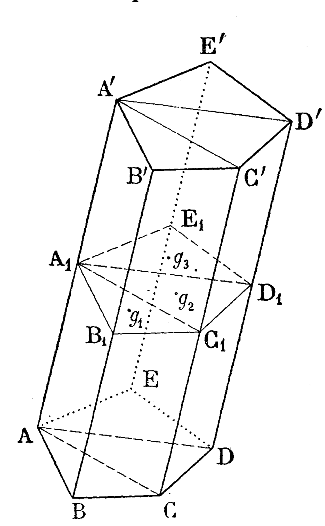
Soit le prisme triangulaire ABCA'B'C'. Son centre de gravité est évidemment dans le plan $A_1B_1C_1$ équidistant des deux bases, parce que ce plan est un plan diamétral pour les cordes parallèles aux arêtes. D'autre part, le plan qui passe par l'arête AA' et par les milieux I et I' des arêtes BC, B'C' est aussi un plan diamétral pour les cordes parallèles à BC ; donc le centre de gravité est dans ce plan. On voit de même qu'il est dans les deux autres plans médians et par suite qu'il est à l'intersection de ces plans. Or, AI et A'I' étant les médianes des bases, l'intersection des trois plans est la ligne qui joint les centres de gravité des deux bases ; donc enfin le centre de gravité est au milieu de cette ligne.



128. **Corollaire.** — Soient g et g' les centres de gravité des bases ; le point de rencontre de gg' avec le plan $A_1B_1C_1$ est le centre de gravité du triangle $A_1B_1C_1$; donc *le centre de gravité d'un prisme triangulaire coïncide avec le centre de gravité de la section moyenne.*

129. Théorème. — *Le centre de gravité d'un prisme quelconque est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des bases.*

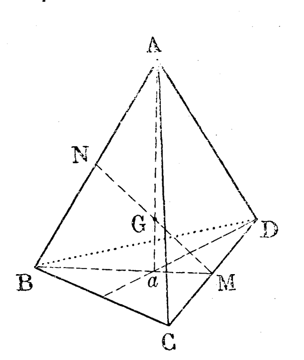
Soit le prisme ABCDEA'B'C'D'E'. Décomposons-le en prismes triangulaires par des plans diagonaux AA'CC', AA'DD', etc., et soient g_1, g_2, etc. les centres de gravité de ces prismes situés (127) dans le plan moyen $A_1B_1C_1D_1E_1$. Appliquons aux points g_1, g_2, etc. des poids proportionnels à ceux des prismes correspondants ; on peut considérer ces prismes comme ayant même hauteur et pour bases respectives les triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, etc. ; leurs poids sont donc proportionnels aux aires de ces triangles. D'autre part, les points g_1, g_2, etc. sont les centres de gravité des mêmes triangles ; il en résulte que le centre de gravité cherché coïncide avec celui du polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$, c'est-à-dire avec le milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des bases (106).



130. Cylindre. — Théorème. — *Le centre de gravité d'un cylindre est au milieu de la ligne qui joint les centres de gravité des bases.*

On peut en effet considérer le volume d'un cylindre comme la limite du volume d'un prisme inscrit dont on augmente indéfiniment le nombre des côtés de la base de manière que chaque côté tende vers zéro.

131. Pyramide. — Théorème. — *Le centre de gravité d'un tétraèdre est à l'intersection des six plans déterminés par chaque arête et le milieu de l'arête opposée.*



Soit le tétraèdre ABCD ; le plan ABM mené par l'arête AB et par le milieu M de l'arête opposée CD est un plan diamétral pour les cordes parallèles à CD ; le centre de gravité du tétraèdre est donc dans ce plan, et par suite à l'intersection G des six plans déterminés par chaque arête et le milieu de l'arête opposée.

132. Remarques. — 1° Les plans ABG, CDG passent tous deux par le point G et par les milieux M et N des arêtes AB et CD ; les trois points M, N, G sont donc en ligne droite. Il en résulte que le centre de gravité du tétraèdre est à l'intersection des lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées.

2° Le plan ABM passe évidemment par le point a, centre de gravité du triangle BCD ; comme il passe aussi par le point A, on voit que le centre de gravité d'un tétraèdre est à l'intersection des lignes qui joignent les sommets aux centres de gravité des faces opposées.

133. **Corollaire.** — *Les six plans menés par chaque arête et les milieux des arêtes opposées, les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées et les quatre droites joignant les sommets aux centres de gravité des faces opposées, concourent en un même point qui est le centre de gravité du tétraèdre.*

134. **Théorème.** — *Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec le centre des moyennes distances des quatre sommets.*

En effet, le centre des moyennes distances des quatre sommets est sur la droite Aa qui joint le point A au centre des moyennes distances de la base BCD ; il est donc sur les quatre droites joignant les sommets aux centres de gravité des faces opposées ; par suite, il coïncide avec le point G.

135. Remarques. — 1° Il suit du théorème précédent que l'on a

$$\frac{Ga}{GA} = \frac{1}{3},$$

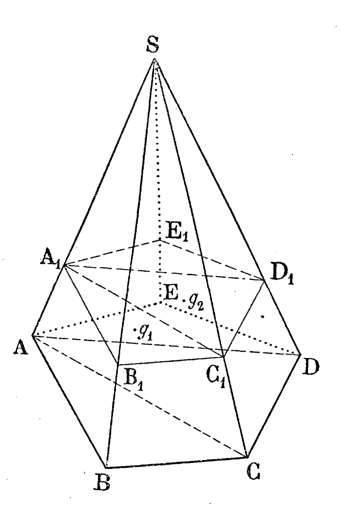
d'où
$$Ga = \frac{Aa}{4};$$

donc *le centre de gravité d'un tétraèdre est sur la ligne qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée et au quart de cette ligne à partir de la base.*

2° On peut considérer le point G comme l'intersection de Aa avec le plan P parallèle à celui de la face BCD mené au quart de la hauteur à partir de cette face ; il coïncide ainsi avec le centre de gravité de la section de la pyramide par le plan P.

Ce dernier résultat est généralisé dans le théorème suivant.

136. **Théorème.** — *Le centre de gravité d'une pyramide est au centre de gravité de la section faite dans la pyramide par un plan parallèle à la base et mené au quart de la hauteur à partir de la base.*



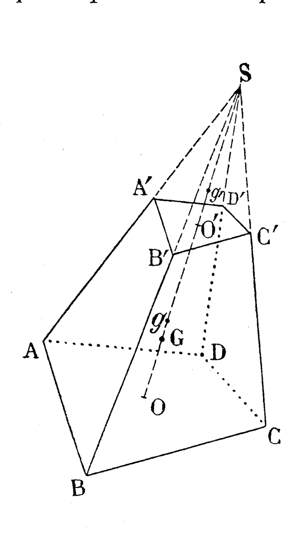
Soit la pyramide SABCDE et soit $A_1B_1C_1D_1E_1$ la section faite par le plan parallèle à la base et menée au quart de la hauteur à partir de cette base. Décomposons cette pyramide en tétraèdres par les plans diagonaux SAC, SAD, etc. ; les centres de gravité g_1, g_2, etc. de ces tétraèdres coïncident (135) avec ceux des triangles $A_1B_1C_1$, $A_1C_1D_1$, etc. D'ailleurs les pyramides ayant même hauteur, leurs poids sont proportionnels aux bases et par suite aux aires des triangles $A_1B_1C_1$, A_1C_1D, etc. ; il suit évidemment de là que le centre de gravité de la pyramide coïncide avec celui du polygone $A_1B_1C_1D_1E_1$.

137. Remarque. — Le centre de gravité d'un polyèdre s'obtient en décomposant le polyèdre en tétraèdres.

138. Cône. – Théorème. — *Le centre de gravité d'un cône coïncide avec le centre de gravité de la section faite dans le cône par un plan parallèle à la base mené au quart de la hauteur à partir de la base.*

En effet, on peut considérer le volume du cône comme la limite du volume d'une pyramide inscrite, dont on augmente indéfiniment le nombre des côtés de la base de manière que chaque côté tende vers zéro.

139. Tronc de pyramide à bases parallèles. — Considérons le tronc de pyramide obtenu en coupant la pyramide SABCD par le plan A′B′C′D′ parallèle à la base. Soit G son centre de gravité et soient g et g' les centres de gravité respectifs des deux pyramides SABCD et SA′B′C′D′. Ces trois points sont en ligne droite avec le point S, car on peut considérer le poids de la pyramide totale, appliqué en g, comme la résultante des poids du tronc de pyramide et de la pyramide partielle, appliqués respectivement en G et en g' ; donc les trois points G, g et g' sont en ligne droite. D'autre part les points g et g' sont sur la droite qui joint le point S au centre de gravité O du polygone ABCD, ou au centre de gravité O′ du polygone A′B′C′D′; donc les trois points G, g et g' sont en ligne droite avec le point S et avec les points O et O′.



Cela posé, nous allons, pour déterminer le point G, calculer la valeur absolue du rapport $\frac{\mathrm{GO}}{\mathrm{GO'}} = \lambda$. Pour cela, appliquons le théorème des moments aux trois poids, poids de la pyramide totale, poids du tronc de pyramide et poids de la pyramide partielle, en prenant les moments successivement par rapport

aux deux plans ABCD, A'B'C'D' et parallèlement à la direction SO.

En appelant V le volume du tronc de pyramide, nous avons ainsi

$$\text{SABCD} \times g\text{O} = \text{V} \times \text{GO} + \text{SA'B'C'D'} \times g'\text{O},$$
$$\text{SABCD} \times g\text{O'} = \text{V} \times \text{GO'} - \text{SA'B'C'D'} \times g'\text{O'}.$$

Si on isole $\text{V} \times \text{GO}$ et $\text{V} \times \text{GO'}$, puis que l'on divise membre à membre, on obtient

$$\lambda = \frac{\text{SABCD} \times g\text{O} - \text{SA'B'C'D'} \times g'\text{O}}{\text{SABCD} \times g\text{O'} + \text{SA'B'C'D'} \times g'\text{O'}}.$$

Mais si l'on pose $\text{SO} = l$ et $\text{SO'} = l'$, on a

$$g\text{O} = \frac{l}{4}, \qquad g'\text{O'} = \frac{l'}{4}, \qquad g\text{O'} = \frac{3l}{4} - l', \qquad g'\text{O} = l - \frac{3l'}{4}.$$

D'autre part, les deux pyramides SABCD et SA'B'C'D' sont semblables, et si l'on appelle α leur rapport de similitude, on sait que

$$\text{SABCD} = \alpha^3 \times \text{SA'B'C'D'},$$
$$l = \alpha l'.$$

En remplaçant dans l'expression de λ et en réduisant, il vient alors

$$\lambda = \frac{\alpha^4 - 4\alpha + 3}{3\alpha^4 - 4\alpha^3 + 1}.$$

Cette fraction peut être d'ailleurs simplifiée, car ses deux termes s'annulent pour $\alpha = 1$ et par suite sont divisibles par $\alpha - 1$; en faisant la division, on obtient ainsi

$$\lambda = \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 3}{3\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1}.$$

On simplifie cette fraction comme la précédente en divisant par $\alpha - 1$ et on obtient finalement

$$\lambda = \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3}{3\alpha^2 + 2\alpha + 1}.$$

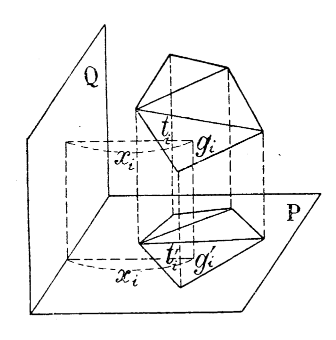
140. Remarque. — On opérerait de même pour trouver le centre de gravité d'un tronc de cône à bases parallèles.

CHAPITRE X

APPLICATIONS DES CENTRES DE GRAVITÉ ET THÉORÈMES DE GULDIN

141. Théorème. — *Le centre de gravité de la projection d'une aire plane* A*; sur un plan* P*, coïncide avec la projection, sur le plan* P*, du centre de gravité de l'aire* A.

La proposition est évidente pour un triangle, car si un triangle T se projette suivant un triangle T′, le point de rencontre des médianes de T′ est la projection du point de rencontre des médianes de T.



Démontrons alors la proposition pour une aire polygonale A qui se projette, sur le plan P, suivant une aire A′, et dont le plan fait avec le plan P l'angle α. Pour cela, décomposons l'aire A en triangles d'aires t_i et projetés suivant des triangles d'aires t'_i, de sorte que

$$t'_i = t_i \cos \alpha; \tag{1}$$

on a d'ailleurs

$$A' = A \cos \alpha. \tag{2}$$

Considérons un plan quelconque, Q, perpendiculaire au plan P, et prenons les moments par rapport au plan Q parallèlement à une direction perpendiculaire à ce plan. Si l'on appelle x_i la distance au plan Q du centre de gravité du triangle t_i, x la distance à ce même plan du centre de gravité de A, on a d'abord

$$Ax = \Sigma t_i x_i. \tag{3}$$

Si l'on appelle de même x' la distance au plan Q du centre de gravité de A′, et si l'on remarque que les centres de gravité de t_i et de t'_i sont équidistants du plan Q, puisque la proposi-

tion est admise pour le triangle, on a aussi

$$(4) \qquad A'x' = \Sigma t'_i x_i.$$

Mais si l'on tient compte des égalités (1) et (2), l'équation (4) s'écrit

$$Ax' \cos \alpha = \Sigma t_i x_i \cos \alpha = \cos \alpha \Sigma t_i x_i,$$

et devient finalement, après suppression du facteur cos α,

$$(5) \qquad Ax' = \Sigma t_i x_i.$$

En comparant avec (3), il en résulte

$$x' = x.$$

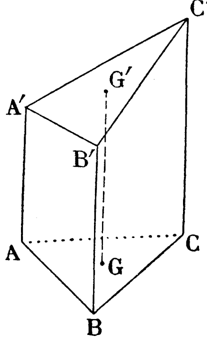
Les centres de gravité de A et de A′ sont, d'après cela, à égale distance de *tout plan* Q perpendiculaire au plan P ; donc ils sont sur la même perpendiculaire à ce plan, ce qui démontre la proposition pour une aire polygonale.

On l'étend ensuite à une aire curviligne quelconque en considérant cette aire curviligne comme la limite d'une aire polygonale inscrite.

142. Corollaire. — *Les centres de gravité des sections planes d'une surface prismatique ou cylindrique sont sur une même parallèle aux arêtes.*

Car si l'on mène une section droite, tous ces points se projettent au centre de gravité de cette section droite.

143. Théorème. — *Le volume d'un prisme tronqué est égal au produit de la section droite par la distance des centres de gravité des deux bases.*



Considérons d'abord un tronc de prisme triangulaire droit ABCA′B′C′, et soient G et G′ les centres de gravité respectifs des deux bases. D'après un théorème de géométrie, le volume v de ce corps est donné par la formule

$$v = ABC \times \frac{AA' + BB' + CC'}{3}.$$

Mais le point G′ étant le centre des moyennes distances des

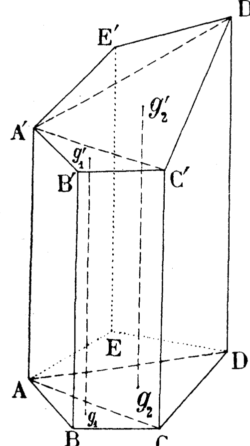
trois points A′, B′ et C′ (113), sa cote par rapport au plan ABC est la moyenne arithmétique des cotes des points A′, B′, C′; donc on a

$$GG' = \frac{AA' + BB' + CC'}{3}$$

et, par suite,

$$v = ABC \times GG',$$

ce qui démontre la proposition pour le tronc de prisme triangulaire droit.



Considérons maintenant un tronc de prisme droit quelconque de volume v et dont la section droite est ABCDE. On peut décomposer ce tronc de prisme en troncs de prisme triangulaires droits de volumes $v_1, v_2, \ldots$ et dont les sections droites ABC, ABD, ... ont pour surfaces respectives $s_1, s_2, \ldots$. Soit γ_1 la distance des centres de gravité g_1 et g'_1 des deux triangles ABC et A′B′C′; soit de même γ_2 celle des centres de gravité g_2 et g_2 des deux triangles ABD et A′B′D′, et ainsi de suite. D'après la première partie de la proposition, on a

$$v = S_1\gamma_1 + S_2\gamma_2 + \cdots.$$

Or, si nous appelons S la surface du polygone ABCDE et si nous appliquons le théorème des moments aux poids $s_1, s_2, \ldots$ appliqués respectivement en $g_1, g_2, \ldots,$ en prenant les moments par rapport au plan A′B′C′D′E′, parallèlement à la direction AA′, on a

$$S \times GG' = s_1\gamma_1 + s_2\gamma_2 + \cdots,$$

G désignant le centre de gravité de la section droite et G′ celui du polygone A′B′C′D′E′.

On a donc

$$v = S \times GG',$$

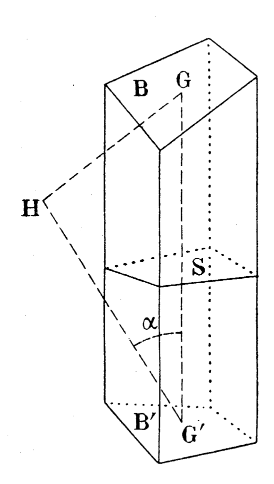
et la proposition est démontrée pour un tronc de prisme droit quelconque.

On l'étend alors sans difficulté à un tronc de prisme quelconque en le décomposant en deux troncs de prisme droits.

144. Remarque. — Ce théorème s'étend à un cylindre tronqué, en le considérant comme la limite d'un prisme tronqué inscrit.

145. **Corollaire.** — *Le volume d'un cylindre tronqué ou d'un prisme tronqué est égal au produit de l'une des bases par la distance à celle-ci du centre de gravité de l'autre.*

La démonstration étant la même pour le prisme tronqué et pour le cylindre tronqué, il suffit de la donner dans l'un de ces deux cas. Considérons donc un prisme tronqué dont les bases B et B′ ont pour centres de gravité les points G et G′. Soit S la surface de la section droite et soit α l'angle du plan de base B avec le plan de section droite. Si l'on mène G′H perpendiculaire au plan de la base supérieure, il est clair que l'angle GG′H est égal à α. Il en résulte que l'on a



$$G'H = GG' \cos \alpha$$

et, par suite, que le volume V du tronc de prisme s'obtient (143) par la formule

$$V = S \times \frac{G'H}{\cos \alpha} = \frac{S}{\cos \alpha} \cdot G'H;$$

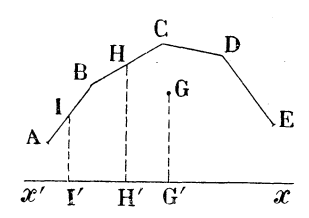
mais on sait que $\frac{S}{\cos \alpha} = B,$

donc $V = B \times G'H.$

146. **Théorème.** — *L'aire engendrée par une ligne plane exécutant une révolution complète autour d'un axe mené dans son plan et ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de cette ligne par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Considérons d'abord une ligne polygonale ABCDE tournant

autour de l'axe $x'x$. L'aire engendrée est évidemment la somme des aires engendrées par les côtés AB, BC, ... de cette ligne ; nous pouvons donc écrire, en appelant A l'aire engendrée,



$$A = \text{surf. } AB + \text{surf. } BC + \ldots.$$

Or, si l'on mène les perpendiculaires II', HH', ... des milieux des côtés sur l'axe, on a

$$\text{surf. } AB = 2\pi II' \times AB,$$

$$\text{surf. } BC = 2\pi HH' \times BC,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On en déduit

$$A = 2\pi(II' \times AB + HH' \times BC + \ldots).$$

D'autre part, soient G le centre de gravité de la ligne polygonale, L la longueur de cette ligne et GG' la perpendiculaire menée du point G sur l'axe. En prenant les moments parallèlement à GG', par rapport à un plan quelconque passant par l'axe, on a

$$L \times GG' = II' \times AB + HH' \times BC + \ldots..$$

Il en résulte

$$A = 2\pi GG' \times L,$$

ce qui démontre la proposition pour une ligne polygonale. On l'étend ensuite à une ligne plane quelconque en la considérant comme la limite d'une ligne polygonale inscrite.

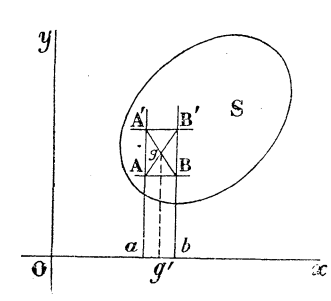
147. Remarque. — Si, au lieu de faire une révolution complète, la ligne ne tourne que d'un angle α, l'aire engendrée a pour expression

$$A = 2\pi GG' \times L \times \frac{\alpha}{360}.$$

148. **Théorème.** — *Le volume engendré par une aire plane exécutant une révolution complète autour d'un axe situé dans son plan et ne la traversant pas, est égal au produit de cette aire par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Soit S l'aire plane que nous supposerons décomposée en

rectangles très petits par des droites parallèles et perpendiculaires à l'axe de révolution $x'x$; soit ABA'B' l'un quelconque de ces rectangles ayant pour centre le point g. Le volume V, engendré par l'aire, est évidemment la somme des volumes engendrés par les rectangles analogues à ABA'B'. Or, le volume engendré par ce rectangle



a pour expression $\pi AB(\overline{A'a}^2 - \overline{Aa}^2)$,
c'est-à-dire

$$\pi AB(A'a - Aa)(A'a + Aa) = \pi AB \times AA'(A'a + Aa).$$

Mais $Aa + A'a = 2gg'$; donc l'expression du volume engendré par le rectangle ABA'B' est

$$2\pi AB \times AA' \times gg',$$

et l'on a $$V = 2\pi \sum AB \times AA' \times gg'.$$

Mais on peut considérer $AB \times AA' \times gg'$ comme le moment, parallèlement à gg' et par rapport à un plan quelconque passant par l'axe, du poids du rectangle ABA'B' supposé appliqué au point g. Si donc on appelle Y la distance à l'axe du centre de gravité de l'aire, S la mesure de cette aire, on a

$$\sum AB \times AA' \times gg' = S.Y,$$

et, par suite, $$V = 2\pi Y.S,$$

ce qui démontre la proposition.

149. Remarque I. — Si la figure tourne seulement de l'angle α, on a

$$V = 2\pi Y.S.\frac{\alpha}{360}.$$

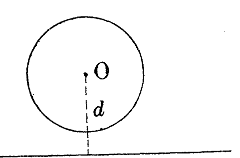
150. Remarque II. — Les deux théorèmes précédents portent le nom de *théorèmes de Guldin* ; si l'on appelle Y le rayon de la circonférence décrite soit par le centre de gravité de la ligne, soit par le centre de gravité de l'aire, ils sont exprimés par les deux formules

$$A = 2\pi Y . L,$$
$$V = 2\pi Y . S,$$

qui permettent de calculer A ou V quand on connaît le centre de gravité, L ou S.

Inversement, si l'on connaît A ou V ainsi que L ou S, on peut en déduire Y, c'est-à-dire une ordonnée du centre de gravité, ce qui suffit dans certains cas pour déterminer ce point. Nous allons appliquer à quelques exemples.

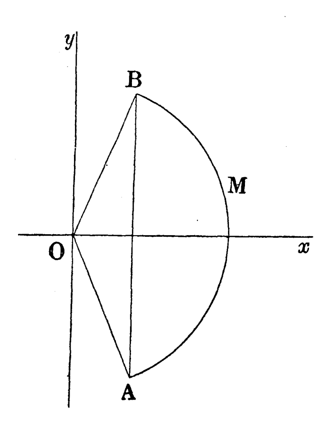
151. Application I. — Surface et volume du tore de révolution. — On sait que l'on appelle *tore de révolution* le volume engendré par un cercle tournant autour d'un axe situé dans son plan.



Soient O le cercle de rayon R et d la distance de son centre à l'axe. Le centre de gravité soit de la circonférence, soit du cercle étant le point O, en appelant S la surface et V le volume du tore, on a en vertu des théorèmes de Guldin,

$$S = 2\pi R . 2\pi d = 4\pi^2 R d,$$
$$V = \pi R^2 . 2\pi d = 2\pi R^2 d.$$

152. Application II. — Centre de gravité d'un arc de cercle. — Soit l'arc AMB de centre O et de rayon R. Son centre de gravité G est situé sur l'axe moyen Ox ; soit x l'abscisse de ce centre de gravité et soient enfin L et c les longueurs respectives de l'arc et de la corde. En tournant autour de l'axe Oy perpendiculaire à Ox, l'arc AMB engendre une zone de hauteur c et dont l'aire a pour expression



$$2\pi R c ;$$

le premier théorème de Guldin donne donc

$$2\pi R c = 2\pi x L,$$

d'où $$x = \frac{Rc}{L}.$$

153. Application III. — Centre de gravité du secteur circulaire. — Soit le secteur OAMB (*fig. précédente*) ; désignons maintenant par x l'abscisse du centre de gravité du secteur situé sur le rayon moyen, comme dans l'application précédente, et gardons pour le reste les mêmes notations que dans le numéro précédent, puis faisons tourner le secteur autour de Oy ; il engendre alors un secteur sphérique dont le volume a pour expression

$$\frac{2}{3}\pi R^2 c.$$

Le deuxième théorème de Guldin donne alors

$$\frac{2}{3}\pi R^2 c = \frac{LR}{2} \cdot 2\pi x,$$

d'où $$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{Rc}{4};$$

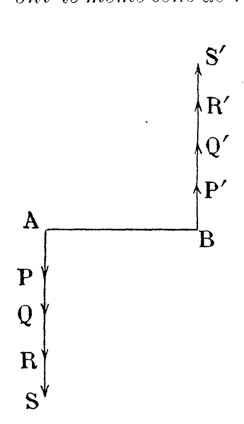
nous retrouvons ainsi les résultats déjà obtenus numéros 110 et 122.

CHAPITRE XI

RÉDUCTION DES FORCES APPLIQUÉES A UN CORPS SOLIDE; CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

154. Composition des couples. — Après avoir réduit à une seule toutes les forces appliquées à un point matériel ou toutes les forces parallèles appliquées à un corps solide, quand elles ne se réduisent pas à un couple, nous allons nous proposer de réduire au plus petit nombre possible toutes les forces appliquées à un corps solide. Supposons d'abord le corps soumis seulement à l'action de plusieurs couples; nous allons montrer que l'*on peut, sans changer l'état du corps, remplacer tous ces couples par un seul.* Nous examinerons pour cela plusieurs cas.

Premier Cas : *Tous les couples sont dans des plans parallèles et ont le même sens de rotation.* — On peut toujours supposer qu'ils soient dans le même plan (48) et que de plus le bras de levier de chacun d'eux soit égal à l'unité (62), de sorte que la force de chaque couple sera égale à son moment. Cela posé, on peut déplacer chaque couple dans son plan, de manière à faire coïncider tous les bras de levier. On aura ainsi plusieurs couples (P.AB), (Q.AB), etc., ayant même bras de levier et pouvant être remplacés par un couple unique, égal à leur somme (53), c'est-à-dire par le couple (P + Q + R + ... S, AB). Le bras de levier de ce couple étant égal à l'unité, *son moment est égal à* P + Q + ... + S, *c'est-à-dire à la somme des moments.*



Deuxième Cas : *Tous les couples sont dans des plans parallèles*

mais n'ont pas le même sens de rotation. — Comme dans le cas précédent, on peut supposer :

1° Que tous ces couples sont dans le même plan;

2° Que chaque couple ait pour bras de levier l'unité ;

3° Que les bras de levier de tous ces couples coïncident.

Soit alors AB le bras de levier commun ; on pourra évidemment remplacer tous ces couples par un seul ayant pour bras de levier AB et dont la force sera la résultante des forces des divers couples qui sont appliqués, soit en A, soit en B.

A B

Soient alors $P_1, P_2, \ldots, P_p$ les forces des couples qui agissent dans un sens, P leur résultante ; soient de même $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les forces des couples qui agissent dans le sens contraire, Q leur résultante. Si, pour fixer les idées, on suppose $P > Q$, la force du couple résultant est égale à $P - Q$, et le sens de rotation de ce couple résultant est le même que celui des couples dont les forces sont $P_1, P_2, \ldots, P_p$.

Mais on a
$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_p,$$
$$Q = Q_1 + \ldots + Q_n;$$

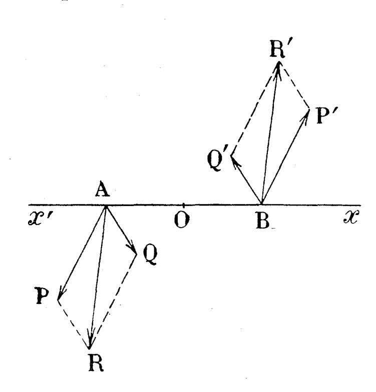
et, d'autre part, les lettres P et Q désignent les moments des couples ; donc, *pour réduire à un couple unique tous les couples qui sont dans un même plan ou dans des plans parallèles, on fait la somme* P *des moments des couples qui agissent dans un sens, puis la somme* Q *des moments des couples qui agissent en sens contraire. Le moment du couple résultant s'obtient alors en retranchant la plus petite somme de la plus grande, et le sens de rotation de ce couple est le même que celui des couples qui ont la plus grande somme.*

Les deux cas peuvent être réduits à un seul. Convenons en effet d'affecter du signe + les moments des couples ayant un sens de rotation fixé une fois pour toutes, et du signe — les moments des autres. Soient alors $m_1, m_2, \ldots, m_p$ les moments, positifs ou négatifs, des couples à composer. On voit, en raisonnant comme au numéro 41, que le couple résultant, de moment m, sera défini, en grandeur et sens, par l'équation

$$m = \sum m_i,$$

qui exprime que *le moment du couple résultant est égal à la somme algébrique des moments des couples composants.*

Troisième Cas : *Les couples sont distribués d'une manière quelconque dans l'espace.* — Considérons d'abord deux couples dont nous supposerons, comme plus haut, les bras de levier égaux à l'unité. Les plans des deux couples n'étant pas parallèles se coupent suivant une droite $x'x$, et nous pouvons évidemment déplacer chaque couple dans son plan, de manière que les deux bras de levier coïncident en AB sur $x'x$; soient alors (P.AB) et (Q.AB) les deux couples.



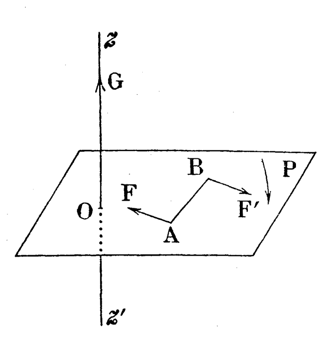
Construisons la résultante R des deux forces P et Q, puis la résultante R' des deux forces P' et Q'. Les deux figures APRQ, BP'R'Q' sont symétriques par rapport au point O, milieu de AB; donc R et R' sont égales, de sens contraires et définissent un couple qui peut remplacer les deux couples proposés.

Considérons maintenant des couples en nombre quelconque, C_1, C_2, ..., C_n. Pour les réduire à un seul, on composera d'abord C_1 avec C_2, puis le couple obtenu avec C_3, et ainsi de suite ; nous aurons finalement un couple unique pouvant les remplacer tous. Ce couple s'appelle le *couple résultant*.

Reste à évaluer le moment de ce couple. Nous arriverons à ce résultat au moyen de la représentation géométrique des couples, dont nous allons maintenant nous occuper.

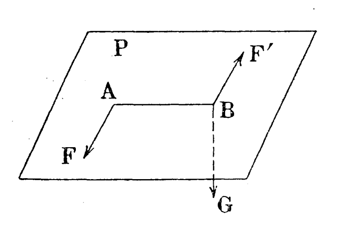
155. Représentation géométrique des couples. — Nous avons vu que l'on peut déplacer parallèlement à lui-même le plan d'un couple; nous pouvons donc supposer que ce plan passe par un point quelconque, O, de l'espace. Soient alors P ce plan et zz' la perpendiculaire au plan P menée par le point O. Sur cette perpendiculaire considérons la demi-droite telle,

que pour un observateur couché sur cette demi-droite et ayant les pieds en O, le sens de rotation du couple (F.AB) soit le sens de gauche à droite, et portons sur cette demi-droite, à partir du point O, un segment ou *vecteur* OG dont la longueur soit mesurée par le même nombre que le moment du couple. A tout couple de l'espace nous faisons ainsi correspondre un vecteur, et réciproquement, à tout vecteur OG il correspond un couple et un seul *dont le sens de rotation est le sens de gauche à droite par rapport à un observateur qui a les pieds en* O *et la tête en* G, *dont le moment est égal à* OG, *et dont le plan est perpendiculaire à* OG.



Ce vecteur OG est appelé l'*axe* du couple, et nous pouvons dire qu'*un couple est représenté géométriquement par son axe.* Il est clair, d'après cela, que deux couples de même moment et de sens contraires sont représentés par deux vecteurs égaux et opposés.

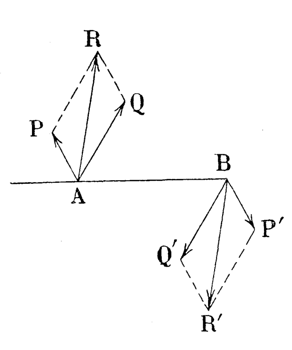
156. **Règle pratique pour construire l'axe d'un couple.** — Supposons que le bras de levier du couple soit égal à l'unité et, par suite, que la force du couple soit égale à son moment. Imaginons qu'un observateur soit couché sur le bras de levier de manière à avoir indifféremment les pieds en A et la tête vers B, ou les pieds en B et la tête vers A ; puis faisons tourner la force du couple *qui est la plus rapprochée de la tête,* de 90° *de gauche à droite* par rapport à cet observateur. On voit sans aucune difficulté que, dans sa nouvelle position, la force vient coïncider avec l'axe du couple, supposé mené par le point d'appli-



cation de la force. Par exemple, dans le cas de la figure, l'axe BG du couple, supposé mené par le point B, s'obtient évidemment en faisant tourner la force BF′ de 90° et de gauche à droite par rapport à l'observateur ayant ses pieds en A et la tête vers B. On s'assure du reste facilement que la règle énoncée plus haut est générale. Cela posé, nous allons établir la proposition suivante, qui résume tout ce qui a trait à la composition des couples.

157. **Théorème.** — *L'axe du couple résultant d'un système de couples est la somme géométrique des axes des couples composants.*

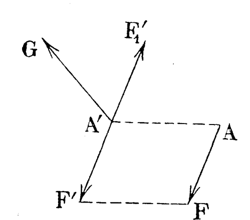
Il suffit évidemment de démontrer la proposition pour deux couples (P.AB), (Q.AB) ayant le même bras de levier, AB, égal d'ailleurs à l'unité. Pour cela, construisons le couple résultant (R.AB), comme au numéro 154, 3e cas, puis faisons tourner le parallélogramme PAQR de 90° de gauche à droite, par rapport à un observateur ayant ses pieds en B et la tête vers A. Après cette rotation les côtés AP, AQ, AR du parallélogramme sont devenus les axes respectifs des couples, et comme AR n'a pas cessé d'être la somme géométrique de AP et de AQ, la proposition est démontrée pour deux couples. On l'étend facilement ensuite à plusieurs couples.



158. Remarque. — Supposons en particulier qu'on ait à composer des couples situés dans des plans parallèles ; alors en menant les axes de ces couples par le même point, on obtiendra l'axe du couple résultant en opérant comme pour composer des forces appliquées au même point et ayant la même ligne d'action. Par suite, en convenant d'affecter du signe + les moments des couples ayant un sens de rotation fixé une fois pour toutes, du signe — les moments des autres,

on voit que le couple résultant est défini en grandeur et sens, au moyen de la somme algébrique des moments des couples composants. On retrouve ainsi la règle de composition des couples dont les plans sont parallèles, donnée numéro 154, 1er et 2e cas.

159. **Théorème.** — *Toute force* AF, *appliquée en un point* A *d'un corps solide, peut être remplacée par une autre*, A′F′, *appliquée en un point quelconque*, A′, *du corps, égale, parallèle à* AF *et de même sens qu'elle, et par un couple ayant son axe perpendiculaire au plan des deux forces.*

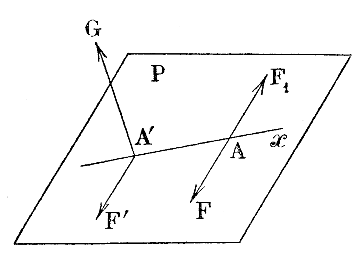


En effet, on ne change pas l'état du corps en appliquant au point A′ deux forces A′F′ et $A'F_1'$ parallèles à AF, de même intensité qu'elle et opposées. Or, F et F_1' définissent un couple dont l'axe A′G est bien perpendiculaire au plan des deux droites AF et A′F′.

Ajoutons que le moment de ce couple, représenté par la longueur de son axe, est égal à l'aire du parallélogramme AFA′F′.

160. **Définition.** — A l'avenir, le couple représenté par A′G et qui résulte de la translation d'une force F sera appelé le *couple de translation*.

161. **Théorème.** — *Réciproquement, une force et un couple dont l'axe lui est perpendiculaire, peuvent être remplacés par une force unique de même intensité, de même direction et de même sens que la première, située dans le plan perpendiculaire à l'axe mené par cette force.*



Soient, en effet, A′F′ la force et A′G l'axe du couple perpendiculaire à la force, par hypothèse ; soit P le plan perpendiculaire à A′G mené par F′. Par le point A′, dans le plan P,

menons une droite quelconque $A'x$ et, en un point A de cette droite, appliquons AF et AF_1, égales et opposées, parallèles à F' et de même intensité que celle-ci. Nous pouvons ainsi remplacer le système proposé par le couple $A'G$, la force AF et le couple $F_1AA'F'$. Or, nous pouvons disposer de la longueur $A'A$ et de la position du point A, soit d'un côté de A', soit de l'autre, de manière que le nouveau couple ait le même moment que $A'G$ et un sens contraire. Alors, le point A étant ainsi choisi, les deux couples se font équilibre; en les supprimant, il ne restera plus que la force AF ; ce qui démontre la proposition.

162. **Théorème.** — *Toutes les forces appliquées à un corps solide peuvent, et cela d'une infinité de manières, être remplacées par une force et par un couple.*

Soit en effet O un point quelconque du corps. Nous pouvons (159) transporter chaque force parallèlement à elle-même au point O, en introduisant le couple de translation correspondant.

Si nous composons alors, d'une part, toutes les forces appliquées au point O, par la règle du polygone des forces, d'autre part, tous les couples de translation en faisant, par exemple, la somme géométrique de leurs axes, nous aurons réduit toutes les forces à une seule et à un couple.

163. **Définitions.** — Cette force et ce couple seront appelés respectivement *résultante générale* et *couple résultant* relatif au point O.

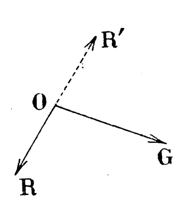
Il est clair que la résultante générale est invariable en grandeur, direction et sens, quand le point se déplace dans le corps, car le polygone des forces se déplace simplement parallèlement à lui-même. Quant au couple résultant, il varie avec le point O.

164. **Équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide.** — Le théorème précédent conduit immédiatement aux conditions géométriques de l'équilibre d'un système de forces; elles résultent de la proposition suivante :

Pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide

soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante générale soit nulle, ainsi que le couple résultant relatif à un point quelconque du corps.

La condition est évidemment suffisante. Montrons donc qu'elle est nécessaire. Supposons, pour cela, que le système soit en équilibre et faisons la réduction pour un point *quelconque*, O, du corps ; soient R et G la résultante générale et l'axe du couple résultant. Puisqu'il y avait équilibre avant la réduction, il y aura encore équilibre après, de sorte que la force R et le couple G, c'est-à-dire le couple dont l'axe est G, se font équilibre. Or, je dis que cela est impossible si R et G ne sont pas nuls tous deux. En effet :



1° S'il y avait équilibre avec $R . G \neq 0$, la force R' égale et opposée à R, faisant équilibre à R, comme G, pourrait remplacer G ; donc nous aurions un couple ayant une résultante, ce qui est impossible ;

2° Il est évident que si on a seulement $R = 0$, il ne peut y avoir équilibre, parce qu'un couple n'est pas en équilibre ;

3° Enfin, il est non moins évident qu'il ne peut y avoir équilibre avec G seul égal à zéro.

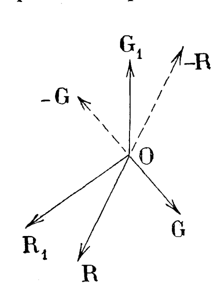
Donc, pour qu'il y ait équilibre, il faut que R et G soient nuls tous deux.

Il est bon de remarquer que la condition est nécessaire *pour tous les points* du corps et qu'elle suffit *pour un seul*, car alors elle est forcément remplie pour tous.

165. **Équivalence de deux systèmes.** — Le théorème du numéro 162 permet aussi d'énoncer les conditions géométriques d'équivalence de deux systèmes de forces ; elles sont fournies par la proposition suivante :

Pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe un point du corps pour lequel la réduction à une force et à un couple donne la même force et le même couple dans les deux cas.

C'est évidemment suffisant, parce que deux systèmes équivalents à un troisième sont équivalents entre eux ; il reste à prouver que c'est nécessaire. Soient donc S et S_1 deux systèmes équivalents. Faisons la réduction pour un point O, d'abord pour les forces du système S, puis pour celles du système S_1. Soient R et G la résultante générale et le couple résultant du premier système, R_1 et G_1 la résultante générale et le couple résultant du second. La force R et le couple G définissent un système équivalent à celui qui est défini par R_1 et par G_1. Or, on peut faire équilibre à la force R et au couple G au moyen de la force $-R$ appliquée en O et du couple $-G$, dont les définitions sont évidentes. Dès lors $-R$ et $-G$ font aussi équilibre au système défini par la force R_1 et le couple G_1. Mais on peut composer d'une part R_1 et $-R$, ce qui donne une force R' ; d'autre part G_1 et $-G$, ce qui donne un nouveau couple G'. Cette force et ce couple doivent être en équilibre, ce qui exige (164) qu'on ait simultanément $R' = 0$ et $G' = 0$. Or, on ne peut avoir $R' = 0$ que si R_1 et $-R$ sont égales et opposées, c'est-à-dire si R_1 est identique à R ; pareillement on ne peut avoir $G' = 0$ que si G_1 et $-G$ sont égaux et opposés, c'est-à-dire si G_1 est identique à G.

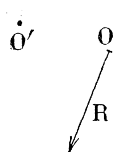


Comme précédemment, la condition est nécessaire pour *tous les points* et suffisante pour *un seul*.

166. **Corollaire.** — *Quand on fait la réduction pour un même point, on trouve toujours la même résultante générale et le même couple résultant, de quelque manière que l'on fasse la réduction.*

167. **Réduction à une force. — Théorème.** — *Pour qu'on puisse réduire à une seule toutes les forces appliquées à un corps solide, il est nécessaire et suffisant que l'axe du couple résultant relatif à un point quelconque soit nul, ou perpendiculaire à la résultante générale.*

C'est suffisant, en vertu du théorème du numéro 161 ; prouvons donc que cela est nécessaire. Supposons, pour cela, qu'en faisant la réduction pour un point O convenablement choisi, on obtienne une force R et pas de couple ; de sorte que R est équivalente au système de forces appliquées au corps. En vertu de la proposition du numéro 166, si on fait la réduction pour un autre point quelconque, O′, on obtient la même force et le même couple qu'en transportant R de O en O′, parce que R constitue, à elle seule, un système équivalent au système proposé. La proposition résulte alors de ce que, si l'on transporte R de O en O′, le couple de translation qui en résulte a son axe perpendiculaire au plan O′OR (159) et par suite à R. Le raisonnement suppose $R \neq 0$.



168. **Corollaires.** — 1° Il est évident que si toutes les forces appliquées à un corps solide concourent au même point, elles se réduisent à une seule.

2° Quand toutes les forces sont dans le même plan P, en prenant un point de ce plan comme centre de réduction, on voit que les axes de tous les couples de translation sont perpendiculaires au plan P, et il en est évidemment de même de l'axe du couple résultant.

La résultante générale étant aussi située dans le plan P, toutes les forces considérées se réduisent à une, en vertu du théorème précédent, si la résultante générale n'est pas nulle. Elles se réduisent à un couple si la résultante générale est nulle.

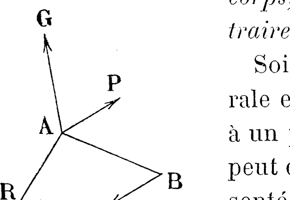
3° Quand toutes les forces sont parallèles à une même droite D, si l'on prend comme centre de réduction un point quelconque O de l'espace, les axes de tous les couples de translation sont situés dans le plan mené par O, perpendiculairement à D ; il en est de même de l'axe du couple résultant ; par conséquent l'axe du couple résultant est perpendiculaire à la résultante générale et, si la résultante générale n'est pas

nulle, le système se réduit encore à une force ; il se réduit à un couple si la résultante générale est nulle. Nous démontrons ainsi à nouveau que toutes les forces parallèles appliquées à un corps solide peuvent être remplacées par une force unique ou par un couple.

169. **Réduction à un couple. — Théorème.** — *Pour que toutes les forces appliquées à un corps solide se réduisent à un couple, il est nécessaire et suffisant que la résultante générale pour un point quelconque soit nulle, sans que le couple résultant le soit.*

Cette proposition résulte de ce que la résultante générale est constante en grandeur.

170. **Réduction à deux forces. — Théorème.** — *Toutes les forces appliquées à un corps solide peuvent être réduites à deux, appliquées l'une en un point* A *choisi arbitrairement dans le corps, l'autre en un point choisi arbitrairement sur une droite passant par* A.



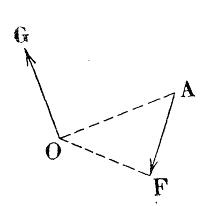
Soient, en effet, R la résultante générale et G l'axe du couple résultant relatif à un point quelconque, A, du corps. On peut donner à la force P du couple représenté par G et par suite au bras de levier du couple, une valeur quelconque ; on peut aussi supposer que l'une des forces du couple soit appliquée en A ; soit P cette force. En composant les forces P et R, la proposition devient alors évidente.

On voit de plus que la force Q est dans un plan fixe mené par le point A.

CHAPITRE XII

MOMENTS DES FORCES ET EXPRESSION ANALYTIQUE DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE

171. **Moment d'une force par rapport à un point.** — On appelle *moment* d'une force F par rapport à un point quelconque O, l'axe du couple qui résulte de la translation de la force F au point O. Ce moment est donc un vecteur OG, perpendiculaire au plan OAF, porté dans un sens tel que le sens de rotation du couple de translation soit le sens de gauche à droite, par rapport à un observateur qui a les pieds en O et la tête en G. On peut du reste mener ce vecteur par un point quelconque de l'espace, et sa valeur numérique est le double de l'aire du triangle OAF. Il en résulte que sa valeur numérique ne change pas : 1° quand on déplace la force sur sa ligne d'action ; 2° quand on déplace le point O sur une parallèle à la ligne d'action de la force.



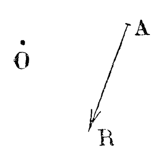
Il en résulte aussi que le moment est nul, soit quand la force est nulle, soit quand elle passe par le point O.

172. **Moment résultant d'un système de forces.** — On appelle *moment résultant* d'un système de forces, par rapport à un point O, l'axe du couple qui résulte de la translation de toutes les forces du système au point O ; ce point prend alors le nom de *centre des moments*.

De cette définition et de la proposition démontrée numéro 157, il suit évidemment que le moment résultant d'un système de forces est la somme géométrique des moments de toutes ces forces.

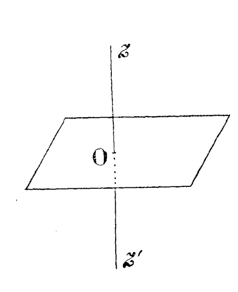
173. **Théorème.** — *Lorsque plusieurs forces ont une résultante, leur moment résultant est égal au moment de la résultante.*

Nous avons vu en effet que la résultante générale et le couple résultant sont les mêmes pour le même point, de quelque façon que l'on fasse la réduction. Or, soit R la résultante, appliquée au point A. On peut faire la réduction pour le point O de deux manières : 1° en transportant toutes les forces, sauf R, parallèlement à elles-mêmes au point O ; l'axe du couple résultant de ces translations est alors, par définition, le moment résultant ; 2° en transportant la force R parallèlement à elle-même au point O ; l'axe du couple qui résulte de cette translation est alors le moment de la résultante. De là et de la proposition du numéro 166 résulte évidemment la proposition.



174. **Corollaire I.** (Théorème de Varignon.) — *Lorsque plusieurs forces sont situées dans le même plan et ont une résultante, la valeur numérique du moment de leur résultante, par rapport à un point de ce plan, est égale à la somme algébrique des valeurs numériques des moments des composantes, par rapport au même point.*

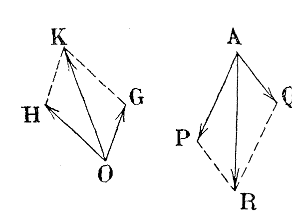
Pour établir cette proposition nous remarquerons que tous les couples qui résultent de la translation des forces en un point de leur plan, sont dans ce plan ; par suite, leurs axes portés à partir du même point, sont distribués sur la même perpendiculaire, zz', à ce plan. Si donc on convient d'affecter du signe + les valeurs numériques des axes portés dans un sens, du signe — les valeurs numériques des autres, en raisonnant comme pour la composition des forces qui ont la même ligne d'action, on voit que la valeur numérique du moment résultant est la somme algébrique des valeurs numériques des moments composants. Donc la valeur numérique du moment de la résultante, quand il y en a une, est égale à la somme algébrique des valeurs numériques des moments des compo-



santes ; car, en vertu de la proposition précédente, il y a identité entre le moment résultant et le moment de la résultante.

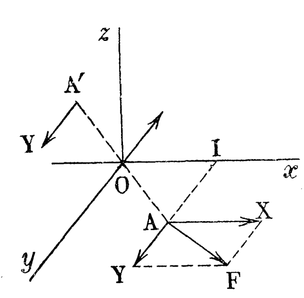
175. Remarque. — On utilise cette proposition pour exprimer les conditions d'équilibre d'un système de forces situées dans le même plan, en remarquant, pour cela, que si la somme algébrique des moments est nulle, la résultante est nulle ou passe par le centre des moments.

176. **Corollaire II.** — *Le moment résultant d'un système de forces ne change pas quand on remplace deux ou plusieurs forces du système par leur résultante, ou inversement.*



Soient, en effet, P et Q deux forces du système ayant une résultante R, et soient OH, OG, OK les moments respectifs de ces forces par rapport à un point O. La proposition énoncée signifie que, dans la détermination du moment résultant de toutes les forces du système, on peut remplacer OH et OG par OK ; mais ceci résulte de ce que dans une somme géométrique de vecteurs on peut remplacer deux ou plusieurs vecteurs par leur somme géométrique, sans que la somme soit altérée (71).

177. **Application.** — *On considère trois axes rectangulaires, Ox, Oy, Oz, et une force F située dans le plan xOy, appliquée en un point A défini par ses coordonnées x et y, et dont les composantes par rapport aux axes Ox et Oy sont X et Y ; trouver le moment de cette force par rapport au point O.*



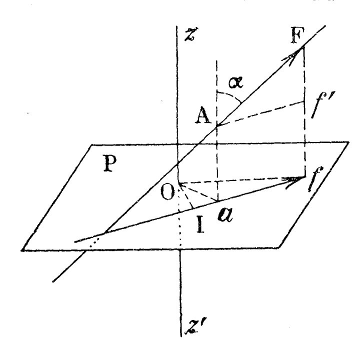
Le moment cherché est un vecteur porté sur Oz, dans un sens ou dans l'autre, suivant le signe de sa valeur numérique. Cherchons donc cette valeur numérique, en convenant d'affecter du signe + et de porter sur la demi-droite

Oz les moments des couples dont le sens de rotation est le sens de gauche à droite, par rapport à un observateur qui a les pieds en O et la tète vers z. En vertu du théorème de Varignon il suffira de faire la somme algébrique des valeurs numériques des moments des forces X et Y.

Occupons-nous d'abord de Y et supposons en premier lieu que Y soit positive ainsi que l'abscisse x du point A, ce qui est le cas de la figure. L'axe du couple qui résulte de la translation de Y au point O est alors évidemment positif, d'après la convention faite plus haut ; sa valeur absolue est $Y \times OI$, et comme ici $OI = x$, il est égal à xY. Je dis qu'il est égal à xY dans tous les cas. Pour le prouver, il y a quatre cas à examiner suivant les signes de x et de Y ; comme nous en avons examiné un, il n'en reste plus que trois. Mais le raisonnement étant le même pour tous, nous bornerons notre examen à un seul, celui, par exemple, de $x < 0$ et $Y > 0$. Supposons donc que le point d'application soit en A' ; la valeur absolue du moment est encore la même que celle de xY, mais il est manifeste que le sens du couple de translation est changé. Donc la valeur algébrique du moment est encore xY.

On verrait absolument de même que le moment de X est égal à $-yX$; par suite le moment de la force F a pour expression $xY - yX$.

178. Moment d'une force par rapport à un axe. — On appelle *moment d'une force par rapport à un axe* le moment, par rapport à un point quelconque de l'axe, de la projection de la force sur le plan perpendiculaire à l'axe mené par ce point.



Soient zz' l'axe, O un point quelconque de cette droite et P le plan perpendiculaire mené par le point O. Soient, d'autre part, F la force appliquée au point A et af sa pro-

jection sur le plan P. La valeur numérique du moment de F par rapport à l'axe zz' est égale, par définition, au double de l'aire du triangle Oaf; par suite, si OI est la perpendiculaire sur af menée par le point O, l'expression du moment est $OI \times f$.

Appelons δ la plus courte distance de l'axe et de la force et α leur angle; on a évidemment $OI = \delta$ et, si l'on mène Af' parallèle à af, le triangle rectangle $Af'F$ donne $Af' = AF.\sin\alpha$, c'est-à-dire

$$f = F \sin \alpha.$$

L'expression du moment prend donc la forme

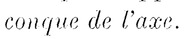
$$F.\delta.\sin\alpha,$$

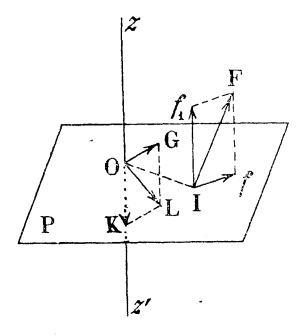
en vertu de laquelle on voit que le moment est nul dans l'un des deux cas suivants : 1° quand la force rencontre l'axe ou lui est parallèle ; 2° quand la force est nulle.

Il résulte d'ailleurs aussi de cette expression que le moment ne change ni quand on déplace le point O sur l'axe, ni quand on déplace la force sur sa ligne d'action, ni enfin quand on déplace la force dans un plan parallèle à l'axe.

Ajoutons que si l'on a à prendre les moments de plusieurs forces par rapport à un axe, il y a lieu de fixer sur cet axe un sens positif Oz, un sens négatif Oz', et d'affecter du signe + les moments portés dans le sens de O vers z, du signe — les autres.

179. **Théorème.** — *Le moment d'une force par rapport à un axe est égal, en grandeur, direction et sens, à la projection sur cet axe du moment de la force par rapport à un point quelconque de l'axe.*



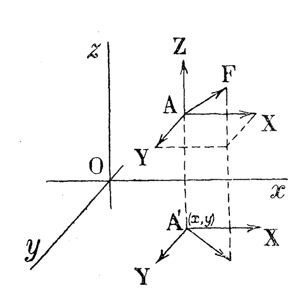


Soit O un point quelconque de l'axe et soit F la force ; comme elle peut être déplacée à volonté sur sa ligne d'action, on peut supposer qu'elle soit appliquée en un point I du plan P perpendiculaire à l'axe et passant par le point O. Décomposons-la en deux autres If_1 et If, la première parallèle à l'axe et la deuxième située dans le plan P; celle-ci est la projection de F sur le

plan P. Le moment de F par rapport au point O est la somme géométrique des moments de f et de f_1 (173). Or, le moment de f_1 est un vecteur OG situé dans le plan P ; le moment de f est un vecteur OK porté sur zz' ; par suite le parallélogramme construit sur OK et sur OG est un rectangle dont la diagonale OL est le moment de F par rapport au point O. Mais le côté OK de ce rectangle est la projection de OL sur zz', et d'autre part OK, moment de f par rapport au point O, est aussi le moment de F par rapport à l'axe ; la proposition est donc démontrée.

180. **Application.** — *On donne les coordonnées du point d'application et les composantes d'une force par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires ; calculer les expressions des composantes, par rapport à ces trois axes, du moment de la force par rapport à l'origine.*

Le moment d'une force F par rapport au point O étant un vecteur, on peut considérer ce vecteur comme la somme géométrique de trois autres, dirigés respectivement suivant Ox, Oy et Oz ; il s'agit de calculer les expressions de ces trois vecteurs au moyen des coordonnées x, y, z du point d'application de la force et des composantes X, Y, Z de cette force suivant les axes. Pour cela, nous remarquerons que la composante de ce vecteur suivant Oz est égale, en vertu du théorème précédent, au moment de la force par rapport à Oz, c'est-à-dire au moment par rapport au point O de la projection de la force sur le plan xOy. Mais la projection de la force sur le plan xOy est une force appliquée en un point (x, y) de ce plan et dont les composantes sont X et Y ; donc, en vertu du numéro 177, son moment par rappport au point O est égal à



$$xY - yX ;$$

cette expression est aussi celle de la composante suivant Oz du moment de la force F par rapport au point O. On en déduit

les autres composantes en permutant circulairement les lettres x, y, z et X, Y, Z. Si donc L, M, N sont les composantes cherchées suivant les axes respectifs Ox, Oy et Oz, on a

$$L = yZ - zY,$$
$$M = zX - xZ,$$
$$N = xY - yX.$$

181. Remarque I. — Par définition les quantités L, M, N représentent aussi en grandeur et signe les projections sur les axes respectifs Ox, Oy et Oz de l'axe du couple qui naît de la translation de la force F au point O. D'après cela, soit $F_1, F_2, \ldots, F_n$ un système de forces appliquées à un corps solide. Supposons que l'on transporte toutes ces forces parallèlement à elles-mêmes au point O et soient, d'une manière générale, L_i, M_i, N_i les projections sur les axes de l'axe du couple de translation de la force F_i. L'axe du couple résultant étant la somme géométrique des axes des couples composants, sa projection sur un axe quelconque est égale à la somme algébrique des projections sur le même axe des axes des couples composants. Si donc L, M, N sont les composantes suivant Ox, Oy et Oz de l'axe du couple résultant, on a

$$L = \Sigma L_i, \qquad M = \Sigma M_i, \qquad N = \Sigma N_i.$$

182. Remarque II. — A cause de la signification des lettres L, M, N, et dans le cas particulier où les forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ ont une résultante, ces formules peuvent encore s'énoncer ainsi :

Lorsque plusieurs forces ont une résultante, le moment de cette résultante par rapport à un axe quelconque est égal à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même axe.

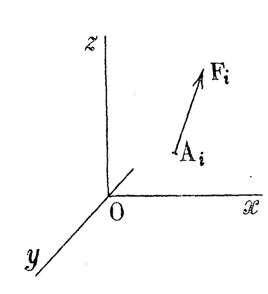
En effet, L, moment de la résultante par rapport à Ox, est égal à ΣL_i, c'est-à-dire à la somme algébrique des moments des composantes par rapport au même axe.

183. Expressions analytiques des conditions d'équilibre d'un système de forces. — Les développements contenus dans les

numéros précédents permettent d'exprimer analytiquement les conditions d'équilibre d'un système de forces, en exprimant que la résultante générale est nulle, ainsi que l'axe du couple résultant relatif à un point. Or, pour que la résultante générale soit nulle, il faut et il suffit que chacune de ses projections sur trois axes formant un trièdre soit nulle ; d'autre part la projection de la résultante sur un axe quelconque est égale à la somme algébrique des projections des composantes. Donc *pour que la résultante générale soit nulle, il faut et il suffit qu'en projetant toutes les forces sur trois axes formant un trièdre, la somme algébrique des projections sur chacun des axes soit nulle.*

Pareillement, *pour que l'axe du couple résultant relatif à un point soit nul, il faut et il suffit qu'en projetant sur trois axes formant un trièdre les axes des couples composants relatifs au même point, la somme algébrique des projections sur chacun des axes soit nulle.*

D'après cela, soient F_1, F_2, ..., F_n les forces appliquées aux points dont les coordonnées par rapport à trois axes *rectangulaires* Ox, Oy, Oz sont respectivement x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; ... ; x_n, y_n, z_n. Appelons, d'une manière générale, X_i, Y_i, Z_i les composantes de la force F_i suivant ces trois axes et L_i, M_i, N_i les composantes, suivant les mêmes axes, de l'axe du couple qui résulte de la translation de la force F_i au point O. Si l'on appelle de même X, Y, Z les composantes de la résultante générale, L, M, N celles de l'axe du couple résultant relatif au point O, on a (181)



$$(1)\quad \begin{cases} X = \Sigma X_i, \\ Y = \Sigma Y_i, \\ Z = \Sigma Z_i; \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} L = \Sigma L_i, \\ M = \Sigma M_i, \\ N = \Sigma N_i; \end{cases}$$

et les conditions d'équilibre du système sont

$$(3)\quad \begin{cases} X = 0, \\ Y = 0, \\ Z = 0; \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} L = 0, \\ M = 0, \\ N = 0. \end{cases}$$

Ajoutons d'ailleurs que, les axes étant rectangulaires, on a (180)

$$(5)\quad L_i = y_i Z_i - z_i Y_i, \quad M_i = z_i X_i - x_i Z_i, \quad N_i = x_i Y_i - y_i X_i.$$

184. **Condition pour qu'il y ait une résultante.** — Il faut et il suffit que l'axe du couple résultant soit nul ou perpendiculaire à la résultante générale. Ces deux hypothèses sont comprises dans l'équation unique

$$(6)\qquad LX + MY + NZ = 0,$$

dans laquelle les six quantités X, Y, Z, L, M, N sont définies par les équations (1) et (2).

Il est du reste bien aisé d'obtenir les coordonnées x, y, z du point d'application de la résultante, quand il y en a une. On a, en effet, pour les déterminer, les trois équations

$$L = yZ - zY,$$
$$M = zX - xZ,$$
$$N = xY - yX,$$

qui se réduisent à deux en vertu de (6). Supposant qu'elles se réduisent aux deux premières, cela veut dire que le point d'application peut être pris arbitrairement sur la droite définie par ces deux équations : cette droite est la ligne d'action de la résultante.

185. **Conditions pour que le système se réduise à un couple.** — Il faut et il suffit que la résultante générale soit nulle (169). Les conditions cherchées sont donc

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Y_i = 0, \qquad \Sigma Z_i = 0.$$

186. **Équivalence de deux systèmes.** — Il faut et il suffit qu'en faisant la réduction pour le même point les couples résultants des deux systèmes soient identiques, ainsi que les deux résultantes générales (165). Si donc on désigne par des lettres accentuées les éléments qui déterminent les forces du

second système, les conditions d'équivalence des deux systèmes seront

$$\begin{cases} \Sigma X_i = \Sigma X'_i, \\ \Sigma Y_i = \Sigma Y'_i, \\ \Sigma Z_i = \Sigma Z'_i, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma L_i = \Sigma L'_i, \\ \Sigma M_i = \Sigma M'_i, \\ \Sigma N_i = \Sigma N'_i. \end{cases}$$

187. Système de forces parallèles. — Lorsqu'on a un système de forces parallèles, on peut supposer l'axe Oz parallèle à ces forces. On a alors

$$X_i = 0, \qquad Y_i = 0, \qquad Z_i = F_i,$$

et, les équations (5) donnent

$$L_i = y_i F_i, \qquad M_i = -x_i F_i, \qquad N_i = 0.$$

Par conséquent

$$X = \Sigma X_i = 0, \qquad Y = \Sigma Y_i = 0, \qquad Z = \Sigma F_i,$$

$$(7) \quad L = \Sigma F_i y_i, \qquad M = -\Sigma F_i x_i, \qquad N = \Sigma N_i = 0.$$

La condition $LX + MY + NZ = 0$ est remplie ; *si donc* Z *ou* ΣF_i *n'est pas nulle*, on a une résultante. Le point d'application de cette résultante sera défini par les équations

$$L = yZ - zY, \qquad M = zX - xZ,$$

c'est-à-dire, ici, par

$$\Sigma F_i y_i = y \Sigma F_i,$$
$$-\Sigma F_i x_i = -x \Sigma F_i.$$

On en déduit les formules

$$x = \frac{\Sigma F_i x_i}{\Sigma F_i}, \qquad y = \frac{\Sigma F_i y_i}{\Sigma F_i},$$

qui définissent la ligne d'action de la résultante.

Si l'on a $\Sigma F_i = 0$, les forces se réduisent à un couple dont l'axe, perpendiculaire à Oz, est défini par les équations (7).

Enfin, les conditions d'équilibre sont

$$\Sigma F_i = 0, \qquad \Sigma F_i y_i = 0, \qquad \Sigma F_i x_i = 0 ;$$

d'où il suit que, pour qu'un système de forces parallèles soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des forces soit nulle, ainsi que la somme algébrique des moments par rapport à deux plans parallèles aux forces. Ces deux der-

nières conditions sont exprimées par les équations

$$\Sigma F_i y_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma F_i z_i = 0.$$

188. **Système de forces non parallèles situées dans le même plan.** — Comme dernier cas particulier supposons que toutes les forces soient dans le même plan sans être parallèles et prenons ce plan pour plan xOy. Alors une force quelconque, F_i, sera appliquée en un point de coordonnées x_i, y_i, 0, et aura pour composantes X_i, Y_i, 0 ; par suite, en se reportant aux formules (5), on aura

$$L_i = 0, \qquad M_i = 0, \qquad N_i = x_i Y_i - y_i X_i.$$

Donc, on aura aussi

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = 0,$$
$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = \Sigma N_i.$$

L'axe du couple étant toujours, d'après cela, perpendiculaire à la résultante générale, si celle-ci n'est pas nulle, les forces se réduisent à une, dont le point d'application x, y est un point de la droite représentée par l'équation

$$xY - yX = N.$$

Les conditions d'équilibre se réduisent ici à trois, savoir :

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Y_i = 0, \qquad \Sigma N_i = 0 ;$$

les trois autres sont identiquement satisfaites. Les trois conditions d'équilibre peuvent évidemment s'énoncer encore de la manière suivante : *Pour qu'un système de forces situées dans le même plan soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique de leurs projections sur deux axes rectangulaires situés dans ce plan soit nulle, et qu'il en soit de même de la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point de ce plan.*

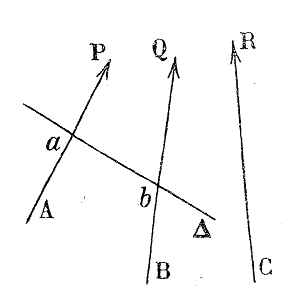
189. Remarque. — Les six conditions d'équilibre d'un système de forces peuvent encore s'énoncer ainsi :

Pour qu'un système de forces appliquées à un corps solide soit en équilibre, il faut et il suffit : 1° *que les sommes algébriques des projections de toutes ces forces sur trois axes formant*

un trièdre soient nulles ; 2° que les sommes algébriques des moments par rapport à ces trois axes soient nulles également.

190. **Théorème.** — *Pour que trois forces appliquées à un corps solide se fassent équilibre, il est nécessaire qu'elles soient situées dans le même plan.*

Soient A, B, C les lignes d'action des trois forces P, Q, R. Considérons une droite quelconque Δ s'appuyant sur les deux premières par exemple, et prenons les moments par rapport à cette droite. Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la somme algébrique de ces moments soit nulle. Or, les moments de P et de Q par rapport à Δ étant évidemment nuls, la somme algébrique des moments se réduit au moment de R ; donc le moment de R par rapport à Δ doit être nul, ce qui exige que R et Δ soient dans le même plan. Supposons alors que Δ tourne autour du point b en s'appuyant sur P ; comme elle doit toujours rencontrer C, on voit que P et R doivent être dans le même plan. Mais alors Q ne peut leur faire équilibre que si elle est égale et opposée à la diagonale du parallélogramme construit sur P et sur R ; donc les trois forces doivent être dans le même plan.



La condition n'est évidemment pas suffisante, et, pour que trois forces situées dans le même plan se fassent équilibre, il faut et il suffit qu'elles soient concourantes et que chacune d'elles soit proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres (66).

CHAPITRE XIII

ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE

191. **Corps libres ; corps gênés.** — Comme les points matériels, les corps solides peuvent être *libres* ou *gênés*. Un corps solide est *libre* quand on peut lui faire occuper une position quelconque dans l'espace ; il est *gêné* dans le cas contraire. En particulier un corps solide mobile autour d'un point fixe ou d'un axe fixe est gêné. D'après cela, la recherche des conditions d'équilibre d'un corps solide comprendra plusieurs cas, que nous allons examiner rapidement.

192. **Équilibre d'un corps solide libre.** — Les conditions d'équilibre d'un corps solide libre sont identiques aux conditions d'équilibre du système des forces qui agissent sur ce corps. Ces conditions ont été énumérées et établies dans le chapitre précédent, nous n'y reviendrons donc pas.

193. **Équilibre d'un corps solide mobile autour d'un point fixe.** — Lorsqu'un corps solide a un point fixe, on admet qu'il exerce sur ce point une certaine *pression* et qu'il éprouve de la part du point une *réaction* ou *résistance* égale et opposée. (*Principe de l'égalité de l'action et de la réaction.*)

Pour qu'il soit en équilibre, *il faut et il suffit que l'axe du couple résultant relatif au point fixe soit nul.*

1° *C'est nécessaire.* — En effet, si l'on appelle O le point fixe et si l'on prend ce point comme centre de réduction des forces appliquées au corps, la résultante générale est détruite par la résistance ; il ne reste donc plus que le couple résultant, qui ne peut être en équilibre que si son axe est nul.

2° *C'est suffisant.* — Car si l'on prend le point O comme centre de réduction, la résultante générale est détruite par la résistance du point, et comme le couple résultant est nul, il y a équilibre.

D'après cela, si l'on rapporte le corps à troix axes rectangulaires passant par le point fixe, et si l'on conserve les mêmes notations que dans les chapitres précédents, les conditions d'équilibre du corps se réduiront à trois et s'écriront

$$\Sigma L_i = 0, \qquad \Sigma M_i = 0, \qquad \Sigma N_i = 0.$$

Les composantes de la résultante générale, c'est-à-dire de la pression, suivant les mêmes axes sont d'ailleurs

$$X = \Sigma X_i, \qquad Y = \Sigma Y_i, \qquad Z = \Sigma Z_i.$$

194. Remarque. — Les conditions d'équilibre peuvent encore s'énoncer ainsi :

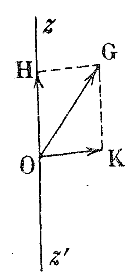
Pour qu'un corps solide qui a un point fixe soit en équilibre, il faut et il suffit que toutes les forces appliquées au corps aient une résultante nulle ou passant par le point fixe.

En effet, pour que l'axe du couple résultant relatif à un point soit nul, il faut et il suffit qu'il y ait une résultante nulle ou passant par ce point. On s'en assure en faisant la réduction à une force et à un couple pour ce point.

195. **Équilibre d'un corps mobile autour d'un axe fixe.** — En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, les divers points du corps situés sur l'axe exercent des pressions sur les points correspondants de l'axe et éprouvent, de la part de ces points, des réactions égales et opposées.

Pour qu'un corps solide mobile autour d'un axe fixe zz' soit en équilibre, il faut et il suffit que l'axe du couple résultant relatif à un point de l'axe de révolution soit nul ou perpendiculaire à cet axe.

1° *C'est nécessaire.* — Car si l'on fait la réduction pour un point O de l'axe, la résultante générale est détruite par la résistance de ce point ; si alors l'axe OG du couple résultant n'est pas nul, il peut être décomposé en deux, OH et OK, le premier dirigé suivant l'axe de révolution, et le deuxième perpendiculaire à cet axe. Le bras de levier du couple OK peut évidemment être amené à coïncider avec zz' et alors les deux



forces qui constituent ce couple sont détruites par la résistance de l'axe. Si donc OH n'est pas nul, le couple dont il est l'axe aura pour effet de faire tourner indéfiniment le corps autour de zz'. Par suite, pour qu'il y ait équilibre, il faut que OH soit nul, c'est-à-dire que l'axe du couple résultant soit perpendiculaire à zz'.

2° *C'est suffisant.* — C'est évident si OG est nul. Si OG n'est pas nul, il se réduit à OK qui est détruit par la résistance de l'axe, en vertu du raisonnement fait dans 1°.

D'après cela, si l'on rapporte le corps à trois axes rectangulaires dont l'un soit zz', il n'y aura qu'une seule condition d'équilibre exprimée par l'équation

$$\Sigma N_i = 0,$$

qui exprime aussi que *la somme algébrique des moments, par rapport à l'axe fixe, des forces qui agissent sur le corps doit être nulle, et que cela est suffisant pour l'équilibre.*

196. Remarque. — Il est clair que les pressions supportées par l'axe sont indéterminées ; car non seulement la position du point O sur zz' est indéterminée, mais on peut aussi faire varier à volonté les forces du couple résultant.

197. **Équilibre d'un corps solide mobile autour d'un axe et pouvant glisser le long de cet axe.** — Il faut évidemment et il suffit que le corps ne puisse ni tourner ni glisser. Pour qu'il ne puisse pas tourner, il faut et il suffit que l'axe du couple résultant relatif à un point quelconque soit nul ou perpendiculaire à l'axe de révolution. Pour qu'il ne puisse pas glisser, il faut et il suffit que la résultante générale soit perpendiculaire à l'axe.

Par conséquent si l'on prend l'axe de révolution pour axe des z, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre seront

$$\Sigma N_i = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma Z_i = 0.$$

198. **Équilibre d'un corps solide s'appuyant sur un plan fixe par un ou plusieurs points.** — Quand un corps solide s'appuie sur un plan fixe par plusieurs points, on appelle polygone de



sustentation un polygone convexe ayant pour sommets des points d'appui et tel que tous les autres points d'appui soient à l'intérieur de ce polygone.

Pour qu'un corps solide assujetti à ces conditions soit en équilibre, *il faut et il suffit que toutes les forces qui agissent sur lui aient une résultante normale au plan, le rencontrant à l'intérieur du polygone de sustentation et pressant le corps contre le plan.*

Soient, en effet, P_1, P_2, ... les points d'appui. La pression du corps développe des réactions normales au plan et appliquées aux points P_1, P_2, ... Toutes ces réactions sont des forces parallèles et de même sens ayant une résultante normale au plan et appliquée en un point situé à l'intérieur du polygone de sustentation. Cette résultante devant être équilibrée par les forces appliquées au corps, celles-ci doivent avoir une résultante, normale au plan, rencontrant le plan à l'intérieur du polygone de sustentation (*) et qui doit presser le corps contre le plan ; donc les conditions énoncées sont nécessaires. Elles sont suffisantes ; car, si elles sont remplies, on peut décomposer (96) la résultante des forces appliquées au corps en trois forces parallèles et de même sens qu'elle, appliquées en trois des sommets du polygone de sustentation et détruites par conséquent par la résistance du plan.

En particulier, s'il y a un seul point d'appui, la résultante doit passer par ce point. S'il y en a deux, elle doit rencontrer la droite qui les joint en un point situé entre ces deux points; en la décomposant alors en deux forces parallèles et de même sens appliquées aux deux points d'appui, on aura les pressions supportées par ces points. De même s'il y a trois points d'appui, la résultante doit rencontrer le plan à l'intérieur du triangle formé par ces trois points et, en la décomposant en trois autres parallèles, appliquées aux sommets du triangle, on pourra évaluer les pressions supportées par les points d'appui.

(*) Ceci résulte de la construction du centre des forces parallèles, quand elles sont toutes de même sens.

Il n'est plus possible d'évaluer ces pressions quand le nombre des points d'appui est supérieur à trois ; car alors le problème est indéterminé (96).

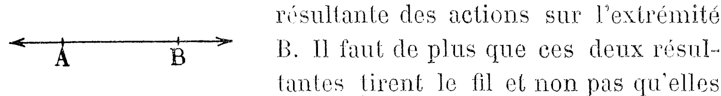
199. **Équilibre d'un système de corps.** — Chaque corps exerce une action sur le corps voisin et éprouve de la part de celui-ci une réaction égale et opposée ; de sorte que l'on peut remplacer l'action de chaque corps par une force de grandeur et de direction convenables. D'après cela, la méthode générale pour exprimer l'équilibre d'un système de corps consiste à considérer chaque corps comme libre et soumis : 1° à l'action des forces données ; 2° aux réactions des corps voisins ou des forces remplaçant les liaisons existantes.

En écrivant alors les conditions d'équilibre de chaque corps, on aura des équations permettant de définir et les positions d'équilibre et les réactions mutuelles.

200. **Remarques.** — 1° Si l'un des corps est réduit à un point, on considère ce point comme la limite d'une sphère de rayon très petit, et si le corps voisin est une surface finie, on applique au point des forces opposées de même intensité et normales à la surface.

2° On opère de même si l'un des corps se termine par une pointe reposant sur une surface finie.

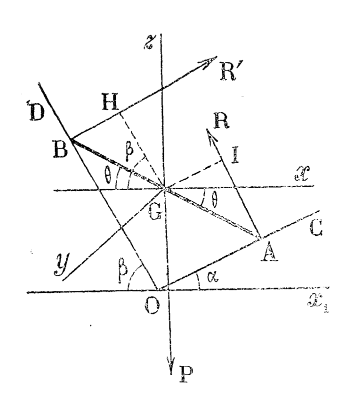
201. **Tension d'un fil.** — Comme cas particulier examinons celui où l'un des corps est un fil. Dans ce cas, nous supposerons toujours le fil sans poids. Pour qu'il y ait alors équilibre, il faut que la résultante des corps voisins sur l'extrémité A du fil soit dirigée suivant le fil AB et soit égale et opposée à la résultante des actions sur l'extrémité B. Il faut de plus que ces deux résultantes tirent le fil et non pas qu'elles soient dirigées l'une vers l'autre. Chacune de ces forces s'appelle la *tension* du fil ; enfin, chacune d'elles est égale et opposée à la force qu'il faudrait appliquer au corps voisin pour remplacer l'action du fil.





202. **Application I.** — *Équilibre d'une barre homogène de poids* P *reposant par ses extrémités sur deux plans inclinés.*

On peut considérer la barre comme libre et soumise : 1° à son poids P, appliqué en son milieu G ; 2° aux réactions R et R′ des deux plans inclinés, appliquées aux extrémités A et B de la barre et respectivement normales à ces deux plans. Pour qu'il y ait équilibre, il faut donc d'abord que ces trois forces soient situées dans le même plan Q, qui sera perpendiculaire aux deux plans inclinés puisqu'il contient R et R′, et qui sera, par suite, perpendiculaire à leur intersection. Mais le plan Q contient aussi la force verticale P ; donc il est vertical, et comme il est perpendiculaire à l'intersection des deux plans inclinés, cette intersection doit être horizontale.



Ainsi, pour qu'il y ait équilibre, il faut d'abord que l'intersection des deux plans inclinés soit horizontale, et que la barre soit située dans un plan Q perpendiculaire à cette intersection.

Cela posé, si l'on prend le plan Q comme plan du tableau et si l'on appelle COD la section des deux plans inclinés par ce plan, le problème est ramené au suivant :

Une barre homogène AB, *de poids* P, *repose par ses extrémités sur un angle vertical* COD ; *trouver sa position d'équilibre.*

Supposons que la position d'équilibre ait été trouvée et rapportons le système à trois axes rectangulaires passant par le point G et définis de la manière suivante : Gz est la verticale du point G ; Gx est perpendiculaire à cette verticale dans le plan Q, et Gy est perpendiculaire au plan Q. Les forces P, R et R′ qui agissent sur la barre étant situées dans le plan zGx, les six conditions d'équilibre se réduisent à trois (188) :

$$\Sigma X_i = 0, \qquad \Sigma Z_i = 0, \qquad \Sigma M_i = 0.$$

Or, si l'on prend comme inconnue l'angle θ que la barre fait

avec Gx, et si l'on appelle α et β les angles aigus respectifs que les deux plans inclinés font avec un plan horizontal quelconque, on a

$$\Sigma X_i = R' \sin\beta - R\sin\alpha,$$
$$\Sigma Z_i = R' \cos\beta + R\cos\alpha - P.$$

D'autre part, si l'on mène les perpendiculaires GI et GH sur R et sur R', on a

$$\Sigma M_i = R' \times GH - R \times GI;$$

mais $GH = GB\cos(\beta - \theta)$ et $GI = GA\cos(\alpha + \theta)$; donc, puisque $GA = GB$, les équations d'équilibre sont

$$R'\sin\beta - R\sin\alpha = 0,$$
$$R'\cos\beta + R\cos\alpha - P = 0,$$
$$R'\cos(\beta - \theta) - R\cos(\alpha + \theta) = 0.$$

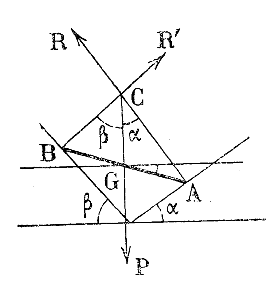
Les deux premières définissent R et R', et la troisième détermine θ quand on connaît le rapport $\frac{R}{R'}$. De la première et de la troisième on déduit du reste successivement

$$(1) \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha + \theta)} = \frac{\sin\beta}{\cos(\beta - \theta)},$$

$$\sin\alpha(\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\sin\theta) = \sin\beta(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta),$$

et enfin
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2\sin\alpha\sin\beta}.$$

203. Remarque. — On aurait pu trouver cette équation plus simplement en remarquant que si la barre est en équilibre, chacune des forces R, R' et P est égale et opposée à la résultante des deux autres ; il en résulte que la verticale du point G doit passer par l'intersection de R et de R'. D'après cela, soient AB la position d'équilibre et C le point de rencontre de R avec R' ; comme CG doit être verticale, les deux triangles GCA et GCB donnent



$$\frac{GC}{\sin A} = \frac{GA}{\sin \alpha},$$

$$\frac{GC}{\sin B} = \frac{GB}{\sin \beta}.$$

Mais on voit facilement que les mêmes triangles donnent $\sin A = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \theta\right)$ et $\sin B = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \theta\right)$. En remplaçant et en divisant membre à membre, on aura donc

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\cos(\alpha + \theta)}{\cos(\beta - \theta)},$$

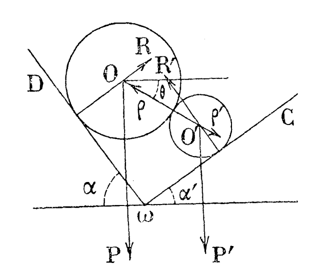
ce qui n'est autre chose que l'équation (1); on achève ensuite le calcul comme plus haut.

204. **Application II.** — *Trouver la position d'équilibre de deux sphères pesantes tangentes entre elles et tangentes à deux plans inclinés.*

Soient O et O′ les deux sphères de poids respectifs P et P′. On peut considérer la première sphère comme libre et soumise à trois forces : son poids P, la réaction R du plan Q auquel elle est tangente, et la réaction ρ de la deuxième sphère. Comme ces trois forces doivent se faire équilibre, il faut qu'elles soient dans le même plan ϖ qui doit satisfaire aux conditions suivantes : il doit être vertical et perpendiculaire au plan Q ; il doit passer par le point O, puisqu'il contient P, et par le point O′, puisque ρ est normale à la sphère O′.

On peut de même considérer la sphère O′ comme libre et soumise à trois forces : son poids P′, la réaction R′ du plan Q′ auquel elle est tangente, et la réaction ρ' de la sphère O, réaction qui est du reste égale et opposée à ρ. En raisonnant comme pour la sphère O, on voit que ces trois forces doivent être contenues dans un plan ϖ' qui doit être vertical et perpendiculaire au plan Q′, qui doit passer par le point O et par le point O′. Il est clair d'après cela que les deux plans ϖ et ϖ' coïncident suivant un plan vertical perpendiculaire à la fois à Q et à Q′, par suite perpendiculaire à leur intersection ; dès lors cette intersection doit être horizontale.

Cela posé, prenons comme plan du tableau le plan vertical mené par les centres des deux sphères et qui contient, d'après les raisonnements précédents, toutes les forces appliquées à l'une ou à l'autre des deux sphères. Soit CωD la section faite par ce plan, dans le dièdre déterminé par les deux plans Q et Q', c'est-à-dire le rectiligne de ce dièdre, puisque son arête est horizontale. Appelons α et α' les inclinaisons des deux plans Q et Q' sur le plan horizontal, et prenons enfin comme inconnue l'angle θ de la ligne des centres avec l'horizontale du plan du tableau. Pour écrire que la sphère O est en équilibre, il suffit d'observer qu'elle est soumise à trois forces situées dans le plan du tableau et passant par le point O; par conséquent, il suffit d'exprimer que les sommes algébriques des projections de ces forces sur une verticale et sur une horizontale du plan du tableau sont nulles. On obtient ainsi, sur la verticale,



(1) $$R \cos \alpha + \rho \sin \theta - P = 0\,;$$

et sur l'horizontale,

(2) $$R \sin \alpha - \rho \cos \theta = 0.$$

En opérant de même pour la sphère O', on aura les équations

(3) $$R' \cos \alpha' - \rho \sin \theta - P' = 0,$$

(4) $$R' \sin \alpha' - \rho \cos \theta = 0.$$

Ces quatre équations définissent R, R', ρ et θ. Des équations (1) et (2) on tire

(5) $$R = \frac{P \cos \theta}{\cos(\alpha + \theta)}, \qquad \rho = \frac{P \sin \alpha}{\cos(\alpha + \theta)}\,;$$

pareillement des équations (3) et (4) on tire

(6) $$R' = \frac{P' \cos \theta}{\cos(\alpha' - \theta)}, \qquad \rho = \frac{P' \sin \alpha'}{\cos(\alpha' - \theta)}.$$

En égalant les valeurs de ρ, on a l'équation qui détermine θ :

$$\frac{P \sin \alpha}{\cos(\alpha + \theta)} = \frac{P' \sin \alpha'}{\cos(\alpha' - \theta)}$$

et que l'on peut écrire successivement

$$P \sin \alpha \cos(\alpha' - \theta) = P' \sin \alpha' \cos(\alpha + \theta),$$

$$(P+P') \sin \alpha \sin \alpha' \sin \theta = (P' \sin \alpha' \cos \alpha - P \sin \alpha \cos \alpha') \cos \theta;$$

on en tire

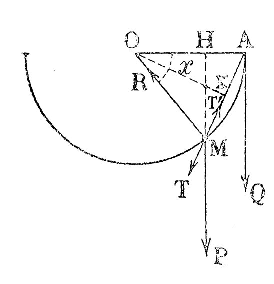
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{P' \sin \alpha' \cos \alpha - P \sin \alpha \cos \alpha'}{(P + P') \sin \alpha \sin \alpha'}.$$

L'angle θ étant ainsi déterminé, on aura R, R' et ρ au moyen des équations (5) et (6).

205. **Application III.** — *Un point matériel M de poids P est mobile dans un hémisphère; il est rattaché à un fil inextensible et sans poids qui passe sur le bord de l'hémisphère et supporte un poids Q à son extrémité; trouver la position d'équilibre.*

On peut considérer le système comme formé : 1° du cordon soumis au poids Q et à la tension T produite par le point M; 2° du point M soumis au poids P, à la réaction T' du fil, égale et opposée à T, enfin à une réaction R normale à l'hémisphère.

Les deux forces Q et T ne peuvent se faire équilibre sur le fil que si elles ont la même intensité; donc $Q = T$ et $T' = Q$, de sorte que tout se passe comme si l'on transportait la force Q au point M. Nous avons donc à chercher les positions d'équilibre du point M soumis aux trois forces P, R et T' ou Q. Ces trois forces doivent être dans le même plan vertical passant par le centre de l'hémisphère; si donc on prend ce plan comme plan du tableau, et si on ne veut pas déterminer R, pour avoir les positions d'équilibre il suffira de prendre les moments par rapport au point O. Prenant alors l'angle $AOM = x$ comme



inconnue, on voit immédiatement que cet angle est déterminé par l'équation $P.OH = Q.OK$,

ou
$$Pr \cos x = Qr \cos \frac{x}{2},$$

dans laquelle r est le rayon de l'hémisphère. On peut écrire cette équation sous la forme

$$2P \cos^2 \frac{x}{2} - Q \cos \frac{x}{2} - P = 0,$$

de laquelle il résulte qu'il y a toujours deux valeurs réelles pour $\cos \frac{x}{2}$; de plus -1 et $+1$ substitués à $\cos \frac{x}{2}$ donnent respectivement $P + Q$ et $P - Q$ comme résultats; de sorte que si $P > Q$, les deux racines sont comprises entre -1 et $+1$ et le problème admet deux solutions.

Si $P < Q$, le problème n'a plus qu'une solution.

Si, après avoir déterminé x, on voulait déterminer R, il faudrait projeter sur la verticale du point M et exprimer que la somme algébrique des projections est nulle.

CHAPITRE XIV

PREMIÈRES NOTIONS SUR LES MACHINES SIMPLES. LEVIER ET BALANCE

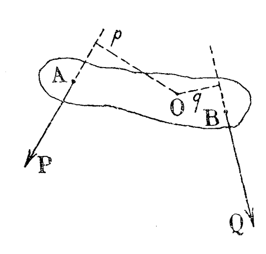
206. **Définition et classification des machines.** — On ne peut pas employer directement les forces à vaincre une résistance ou à produire un mouvement. On obtient ces résultats par l'intermédiaire des *machines*.

Une machine est un corps ou un système de corps gênés par des obstacles fixes. Il y a plusieurs sortes de machines : les unes ont un point fixe, comme le *levier* et les *balances* ; les autres ont un axe fixe, comme les *poulies* et le *treuil* ; d'autres enfin sont constituées, comme le *plan incliné*, par un seul plan, qui est fixe et sur lequel s'appuient les corps que l'on soumet à l'action des forces.

On utilise principalement les machines à l'état de mouvement, mais nous les étudierons d'abord à l'état de repos.

207. **Levier.** — Le levier est un corps solide qui a un point fixe, appelé *point d'appui*. Il sert principalement à soulever un fardeau, c'est-à-dire à vaincre une *résistance* au moyen d'une force appelée la *puissance*.

Soient P la puissance, Q la résistance et O le point d'appui. Si l'on néglige le poids du corps, pour que les deux forces P et Q se fassent équilibre *il faut et il suffit qu'elles aient une résultante et que cette résultante passe par le point* O (194). Il faut donc d'abord que les deux forces P et Q soient situées dans un même plan avec le point O et, en outre, que la somme algébrique de leurs moments par rapport au point O soit nulle (193). Si donc p et q sont les longueurs des perpen-



diculaires menées du point O sur les lignes d'action des deux forces respectives P et Q, pour que ces deux forces soient en équilibre, il faut que l'on ait

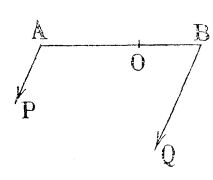
$$Pp = Qq.$$

Les longueurs p et q sont appelées les deux *bras* du levier, et l'égalité précédente montre que l'on peut toujours déterminer p connaissant P, Q et q. Par conséquent avec une puissance et un levier donnés on peut vaincre, théoriquement, une résistance quelconque, appliquée en un point quelconque du levier : il suffit, pour cela, de choisir convenablement le bras de levier de la puissance. Pratiquement, il n'en est pas ainsi à cause du poids et du défaut de résistance du levier.

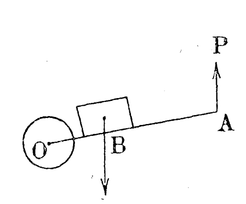
La résultante des deux forces P et Q, quand le levier est en équilibre, s'appelle la *pression* sur le point d'appui. Son expression est

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos (P, Q)}.$$

Lorsque les deux forces P et Q sont parallèles, et sont de plus appliquées en des points A et B en ligne droite avec le point O, les moments sont proportionnels à P.OA et à Q.OB; pour qu'il y ait équilibre, il faut alors que les forces P et Q soient inversement proportionnelles aux bras de levier OA et OB. On distingue, du reste, dans ce cas trois genres de leviers.



Dans les leviers du *premier genre*, le point d'appui est situé entre les points A et B. La *pince à talon* qui sert à soulever les pierres de taille et la balance ordinaire sont des leviers du premier genre.

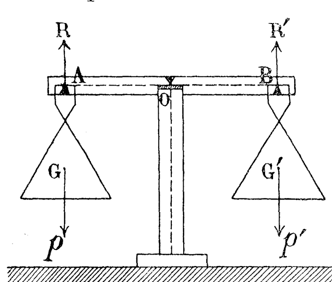


Dans les leviers du *second genre*, tels que la brouette, c'est le point B qui est situé entre les points A et O; la puissance est encore inférieure à la résistance.

Enfin, dans les leviers du *troisième genre*, le point A est situé entre les points O et B; en outre, la puissance est supé-

rieure à la résistance. Les meules à repasser les couteaux sont des leviers du troisième genre.

208. **Balance ordinaire.** — La balance ordinaire sert à évaluer les poids relatifs des corps. Sa partie essentielle est un levier du premier genre ou *fléau*, qui repose, par l'arête O d'un couteau d'acier, sur un plan horizontal de même métal ou en agate, supporté par une colonne. L'arête O remplace le point fixe du levier. Aux extrémités A et B sont disposés deux couteaux, dont l'arête vive est au-dessus, et qui supportent les plateaux de la balance. On a adopté cette disposition des trois couteaux pour éviter les frottements qui s'opposeraient à la mobilité de l'appareil.



Pour évaluer le poids d'un corps, on le place dans l'un des plateaux de la balance et on lui fait équilibre avec des poids marqués, placés dans l'autre plateau. Nous allons voir que tout se passe comme si les poids de chacun des plateaux et du corps qu'il contient étaient réunis en une seule force, appliquée à l'arête de suspension du plateau.

Nous observerons tout d'abord que la balance se compose en réalité de trois corps gênés : le fléau et les deux plateaux. Pour étudier les conditions d'équilibre de la balance, il faut donc étudier les conditions d'équilibre de chacun de ces corps, comme cela a été indiqué numéro 199. Cela posé, supposons en premier lieu que les deux plateaux soient vides, et occupons-nous de l'équilibre de l'un d'eux, celui qui est suspendu en A par exemple. Ce plateau est soumis à l'action de son poids p, appliqué en un certain point G, et exerce une certaine action sur l'arête A du fléau ; il éprouve donc, de la part du fléau, une réaction R égale et opposée ; par suite, il est soumis à deux forces : son poids p, appliqué en G, et la

réaction R, appliquée en A. Par conséquent, pour qu'il soit en équilibre, il faut et il suffit que les deux forces P et R soient égales et directement opposées. Il faut en particulier, pour cela, que G soit sur la verticale du point A, et, de plus, que l'on ait $p = R$.

En recommençant le même raisonnement pour le second plateau de poids p' appliqué en G', et sur lequel le fléau exerce une réaction R', appliquée en B, on voit que G' doit être sur la verticale du point B et que l'on doit avoir en outre $p' = R'$.

Inversement, les actions des plateaux sur le fléau sont des forces verticales égales, l'une à R, l'autre à R', et appliquées respectivement en A et en B. On peut donc, pour l'étude des conditions d'équilibre du fléau, faire abstraction des plateaux, à condition de remplacer leur action par deux forces égales à leurs poids respectifs et appliquées, la première au point A, la deuxième au point B.

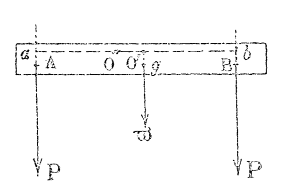
Si nous supposons maintenant que l'on place un poids P dans le plateau qui est suspendu en A et un poids P' dans celui qui est suspendu en B, nous pourrons recommencer les mêmes raisonnements et, par suite, en conclure que *tout se passe comme si les poids* P *et* P' *étaient appliqués respectivement en* A *et en* B.

209. **Centre de gravité de la balance.** — On appelle *centre de gravité* de la balance, le point d'application de la résultante du poids du fléau seul appliqué en son centre de gravité, et de deux forces verticales p et p', égales aux poids respectifs des deux plateaux vides, et appliquées respectivement aux arêtes de suspension A et B des deux plateaux. Dans tout ce qui suit, nous appellerons ϖ la résultante de ces trois poids et g le centre de gravité de la balance, tel qu'il vient d'être défini ; de sorte que si l'on place des poids P et P' dans les plateaux, pour étudier les conditions d'équilibre du fléau, on aura à étudier les conditions d'équilibre de trois forces : 1° la force verticale ϖ, appliquée au point g ; 2° les forces P et P', verticales

aussi, et appliquées respectivement en A et en B. Pour plus de simplicité, nous supposerons que les arêtes des trois couteaux sont parallèles et que les trois forces ϖ, P et P′ sont appliquées en des points situés dans le même plan vertical perpendiculaire aux trois arêtes.

210. Conditions de justesse. — On dit qu'une balance est *juste* si, le fléau étant horizontal quand les plateaux sont vides, il demeure horizontal quand on place des poids égaux dans les plateaux, et si de plus, cette condition est remplie quels que soient ces poids égaux. Nous allons montrer que pour qu'une balance soit juste, il faut : 1° *que le centre de gravité g de la balance soit sur la verticale du point de suspension du fléau* ; 2° *que les deux bras du fléau soient égaux.* On appelle d'ailleurs *bras du fléau* les distances du point de suspension du fléau aux plans verticaux passant par les arêtes de suspension des couteaux.

Appelons en effet P les poids égaux placés dans les plateaux, Oa et Ob les deux bras de levier du fléau. Celui-ci peut être considéré comme un corps solide ayant un point fixe O, et, pour qu'il soit en équilibre, il faut que la somme algébrique des moments des trois forces ϖ, P, P, par rapport au point O, soit nulle. On doit donc



avoir $$P.Oa = \varpi.OO' + P.Ob,$$
ou bien $$P(Oa - Ob) = \varpi.OO'.$$

Mais, le fléau étant supposé horizontal quand les plateaux sont vides, pour que la balance soit juste il faut que cette condition soit remplie quel que soit P, ce qui exige que l'on ait
$$Oa - Ob = 0 \qquad \text{et} \qquad OO' = 0.$$

Ces deux égalités expriment bien les conditions de justesse énoncées plus haut.

Les deux conditions sont suffisantes au point de vue mécanique ; elles ne le sont pas au point de vue pratique, car il

faut de plus que l'équilibre soit stable. Or, on constate facilement que le fléau penche toujours d'un côté ou de l'autre sous l'action de poids égaux, et cela, d'autant plus que ces poids sont plus considérables, de sorte qu'une balance n'est jamais juste, surtout si c'est une balance de précision.

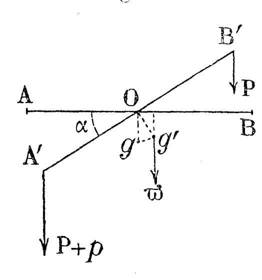
Il est d'ailleurs facile de voir que, pour la stabilité de l'équilibre, il faut que le point g soit au-dessous du point O. Si en effet le point g coïncide avec le point O, la force ϖ est détruite par la résistance de ce point, et, les deux bras du fléau étant supposés égaux, quand on place des poids égaux dans les plateaux la résultante de ces poids passe encore par le point O ; par suite le fléau est en équilibre dans n'importe quelle position : la balance est dite *indifférente* et ne peut servir pour effectuer les pesées.

Si le point g est sur la verticale du point O, mais au-dessus de ce point, quand le fléau est horizontal il est en équilibre ; seulement il tend à tourner de 180° quand on l'écarte légèrement de sa position d'équilibre. Dans ce cas on dit que la balance est *folle* et elle ne peut évidemment pas servir.

Enfin si le point g est au-dessous du point O et si on l'écarte de sa position d'équilibre, on voit facilement qu'il tend à y revenir. En effet, les deux poids égaux placés dans les plateaux ont toujours une résultante détruite par la fixité du point O ; il ne reste donc que la force ϖ dont l'action tend à ramener le fléau dans sa position d'équilibre. Donc le point g doit être situé au-dessous du point O ; d'ailleurs la distance Og n'est pas arbitraire, pour d'autres raisons qui vont être exposées.

211. **Conditions de sensibilité.** — Quand on place des poids inégaux dans les plateaux d'une balance, l'équilibre s'établit sans que le fléau soit horizontal. On dit alors que la balance est plus ou moins *sensible* suivant que l'angle d'écart est plus ou moins considérable pour une différence donnée des poids qui sont dans les plateaux. Il est clair qu'une pesée sera d'autant plus exacte que la balance sera plus sensible. Il importe donc d'étudier les conditions de sensibilité.

Considérons d'abord le cas où les trois points O, A et B sont en ligne droite. Soit g le centre de gravité de la balance, placé au-dessous du point O et sur la verticale de ce point, et soient P et $P + p$ les poids placés respectivement sur les deux plateaux. Sous l'action de ces poids le fléau se met en équilibre dans une position A'B' faisant l'angle α avec la position AB supposée horizontale ; soit alors g' la nouvelle position du point g. Si l'on pose $OA = OB = l$ et $Og = d$, le théorème des moments par rapport au point O, quand l'équilibre est établi, donne



$$(P + p)l \cos \alpha = Pl \cos \alpha + \varpi d \sin \alpha.$$

On en déduit

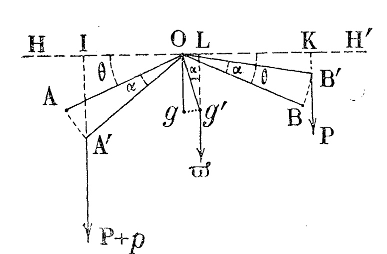
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{\varpi d},$$

et, par suite, deux valeurs de α dont l'une α_1 inférieure à $\frac{\pi}{2}$ et l'autre égale à $\alpha_1 + \pi$. La première correspond à une position d'équilibre stable et la deuxième à une position d'équilibre instable, car le point g' serait au-dessus du point O.

Pour la valeur α_1, qui est la seule dont nous ayons à nous occuper, on voit qu'elle est d'autant plus grande que p et l sont plus grands et que ϖ et d sont plus petits. Ainsi, le point g doit être sur la verticale du point O et au-dessous de ce point, mais à une distance aussi petite que possible, sans être nulle. Ajoutons que les balances de précision sont munies d'un dispositif qui permet d'élever ou d'abaisser le point g suivant que l'on veut effectuer une pesée de précision ou une pesée rapide.

Considérons maintenant le cas où les trois points O, A et B ne sont pas en ligne droite, et supposons que dans la position d'équilibre, pour des poids égaux, les deux longueurs OA et OB, égales à l, fassent un même angle θ avec l'horizon.

Soit toujours g le centre de gravité placé sur la verticale du point O, au-dessous de ce point et à une distance d. Soit α l'angle d'écart obtenu en mettant le poids $P + p$ dans le plateau qui est suspendu en A et le poids P dans l'autre plateau ; soit enfin g' la nouvelle position du point g. En appliquant encore le théorème des moments par rapport au point O, on doit avoir, dans la position d'équilibre,



$$m^t(P + p) + m^t P + m^t \varpi = 0.$$

Or, on a

$$m^t(P + p) = (P + p)OI = (P + p)l \cos(\theta + \alpha),$$
$$m^t P = -P.OK = -Pl \cos(\theta - \alpha),$$
$$m^t \varpi = -\varpi.OL = -\varpi d \sin \alpha.$$

L'équation d'équilibre peut donc s'écrire

$$(P + p)l \cos(\theta + \alpha) = Pl \cos(\theta - \alpha) + \varpi d \sin \alpha.$$

En développant $\cos(\theta + \alpha)$ et $\cos(\theta - \alpha)$, on obtient une équation homogène en $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$, de laquelle on déduit

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{pl \cos \theta}{\varpi d + (2P + p)l \sin \theta}.$$

On voit d'après cela que la sensibilité augmente quand l augmente et que ϖ et d diminuent, p conservant une valeur constante.

Elle est d'autant plus faible que P est plus grand, de sorte qu'il y a avantage à rendre la sensibilité indépendante de P. Pour cela il suffit de construire l'appareil de telle sorte que $\sin \theta = 0$ ou $\theta = 0$; on retombe ainsi dans le premier cas examiné.

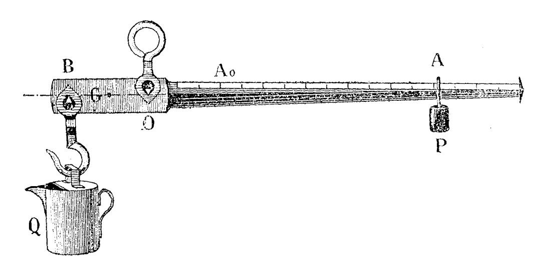
212. **Méthode de la double pesée.** — La méthode de la double pesée, imaginée par Borda, a pour but d'obtenir des pesées exactes indépendamment de la justesse de la balance. Elle

consiste à faire équilibre au corps placé dans l'un des plateaux avec de la grenaille de plomb placée dans l'autre plateau, et à remplacer ensuite le corps par des poids marqués jusqu'à ce que l'équilibre soit de nouveau rétabli dans les mêmes conditions.

L'ensemble de ces poids marqués représente évidemment le poids du corps, avec d'autant plus d'exactitude que la balance est plus sensible.

213. **Balance romaine.** — La balance romaine est un levier du premier genre dont le point d'appui est fixe ainsi que le point d'application de la résistance. La puissance est constante en grandeur, mais son point d'application est variable.

Le levier est d'ailleurs constitué par une tige AB que l'on suspend par un crochet articulé au point d'appui, O. Les corps que l'on veut peser et qui forment la résistance Q sont suspendus à un crochet articulé au point B ; enfin la puissance



est un corps de poids constant P qui se déplace le long de la tige. Le centre de gravité de l'appareil, indépendamment du poids P, doit être un point G situé entre O et B, sans cela on ne pourrait pas peser des corps de faible poids.

Soit ϖ le poids de l'appareil, non compris le poids P, et soient Q la résistance et A le point d'application de la puissance. Supposons que l'appareil soit en équilibre, que le levier soit horizontal, et appliquons le théorème des moments par rapport au point O. L'équation d'équilibre est alors

$$(1) \qquad P.OA = \varpi.OG + Q.OB.$$

Mais, si A_0 est le point d'application de la puissance quand le levier est horizontal et en équilibre sous la seule action des forces P et ϖ, on a

$$(2) \qquad P.OA_0 = \varpi.OG.$$

En retranchant membre à membre, on en déduit

$$P.A_0A = Q.OB,$$

d'où

$$Q = P\frac{A_0A}{OB},$$

ce qui permet d'évaluer Q en lisant A_0A.

L'appareil est du reste gradué de manière à éviter le calcul qu'exigerait l'emploi de cette formule. Pour le graduer, on remarque que la distance A_0A est proportionnelle à Q, de sorte que si l'on suppose $Q = 10^{kg}$, il suffit de partager A_0A en dix parties égales et de prolonger les divisions au-delà du point A.

214. **Bascule du commerce de Quintenz.** — La bascule de Quintenz se compose essentiellement de deux leviers du second genre *ca*, *bd* et d'un levier du premier genre *mo*. Le point fixe du levier *ca* est le point *c*, et l'extrémité *a* de ce levier est reliée à l'extrémité *m* du levier *mo* au moyen d'une tige verticale articulée en *a* et en *m*.

Le point fixe du levier *bd* est le point *b* et l'extrémité *d* de ce levier est reliée au levier *mo* par une tige verticale articulée en *d* et en *h*. Le point *b* est d'ailleurs rattaché au levier *ca* par un couteau fixé perpendiculairement au levier *bd* et dont l'arête vive *b'* repose sur *ca*.

Enfin, le levier du premier genre *mo* est fixé au point *o*, et son extrémité libre porte un poids mobile destiné à faire équilibre au poids Q qu'il s'agit de mesurer. Celui-ci est appliqué en un point *g* du levier *bd*, et l'appareil est construit de manière que, quel que soit le point *g*, tout se passe comme si le poids Q était appliqué au point *h*. Nous allons montrer que, pour qu'il en soit ainsi, il suffit que la bascule ait été construite de telle sorte que l'on ait

$$\frac{oh}{om} = \frac{cb'}{ca}.$$

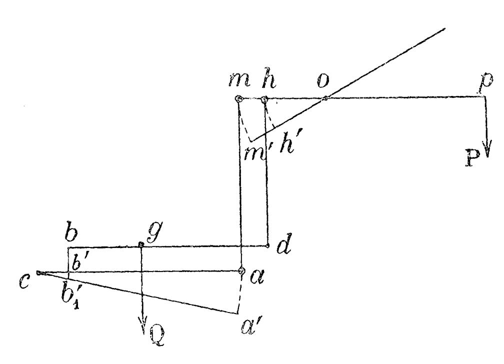
Pour cela imaginons que le poids Q ait été décomposé en deux forces parallèles appliquées respectivement en b et en d : celle-ci est égale à

$$Q\,\frac{bg}{bd}$$

et son point d'application peut être transporté au point h. Quant à l'autre, égale à

$$Q\,\frac{gd}{bd},$$

on peut transporter son point d'application en b' et la décomposer ensuite en deux autres, appliquées respectivement en



c et en a. La première de ces deux forces est détruite par la fixité du point c et la deuxième, égale à

$$Q \cdot \frac{gd}{bd} \cdot \frac{b'c}{ca},$$

peut être transportée au point m, puis décomposée en deux forces parallèles et de sens contraire appliquées respectivement en o et en h. La première de ces deux forces est détruite par la fixité du point o, et la deuxième est égale à

$$Q \cdot \frac{gd}{bd} \cdot \frac{b'c}{ca} \cdot \frac{om}{oh}.$$

Il reste donc en définitive deux forces de même sens appli-

quées au point h. Ces deux forces ont une résultante égale à leur somme

$$Q\,\frac{gd}{bd}\cdot\frac{b'c}{ca}\cdot\frac{om}{oh}+Q\cdot\frac{bg}{bd}.$$

Si donc la bascule a été construite de telle sorte que

$$\frac{b'c}{ca}\cdot\frac{om}{oh}=1,$$

c'est-à-dire de telle sorte que

$$\frac{oh}{om}=\frac{cb'}{ca},$$

cette somme se réduit à

$$Q\left(\frac{gd}{bd}+\frac{bg}{bd}\right)=Q,$$

et tout se passera comme si la force Q était transportée intégralement au point h, quelle que soit la position du point g.

Mais alors si P est le poids destiné à lui faire équilibre, p le point d'application fixe de ce poids, l'équation d'équilibre est

$$Q.oh=P.op.$$

Ordinairement on construit la balance de manière que $op=10.oh$; alors $Q=10P$, et le poids Q est égal à dix fois le poids marqué avec lequel on lui fait équilibre dans le plateau de la balance.

On peut montrer que si la balance n'est pas en équilibre et si le levier mop a un angle d'écart assez petit, les points b et d descendent *sensiblement* de la même longueur et le levier bd reste *sensiblement* horizontal. Supposons en effet que m et h descendent en m' et h' : l'angle d'écart étant suffisamment petit, on peut considérer mm' et hh', qui sont des arcs de cercle de centre o, comme confondus avec leurs tangentes en m et en h ; de sorte que les triangles semblables ohh' et omm' donnent

$$mm'=hh'\cdot\frac{om}{oh}.$$

En appelant de même aa' et $b_1b'_1$ les quantités dont descendent respectivement le point a et le point b', on a

$$aa'=b_1b'\cdot\frac{ca}{cb'}.$$

Mais mm' est évidemment égal à aa', donc

$$hh' \cdot \frac{om}{oh} = b_1 b'_1 \cdot \frac{ca}{cb'};$$

d'autre part, nous venons de voir que la balance est construite de telle sorte que

$$\frac{om}{oh} = \frac{ca}{cb'};$$

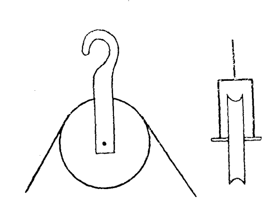
il en résulte $$hh' = b_1 b'_1.$$

Or, hh' est la quantité dont descend le point d, $b_1 b'_1$ est la quantité dont descend le point b' et par suite dont descend le point b. Donc enfin bd demeure sensiblement horizontal.

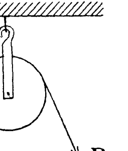
CHAPITRE XV

POULIE, TREUIL ET PLAN INCLINÉ

215. **Description de la poulie.** — La poulie est un cylindre dont la hauteur est très petite par rapport au rayon. La surface du cylindre est creusée d'un sillon ou *gorge* dans laquelle s'engage une corde; enfin la poulie est mobile autour d'un axe dirigé suivant l'axe du cylindre et s'appuyant par ses extrémités sur une fourchette appelée *chape*.

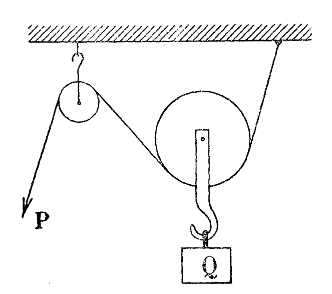


L'appareil tout entier est représenté dans la figure ci-contre par deux projections : l'une sur un plan perpendiculaire à l'axe; l'autre sur un plan passant par l'axe.



Dans la *poulie fixe*, la chape est suspendue à un point fixe, la puissance et la résistance s'exercent aux extrémités de la corde.

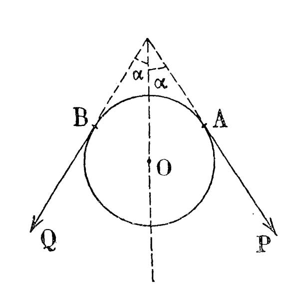
Dans la *poulie mobile*, l'une des extrémités de la corde est attachée à un point fixe ; l'autre extrémité passe sur la gorge d'une poulie fixe, et c'est sur cette extrémité que l'on fait agir la puissance; quant à la résistance, elle s'exerce sur la chape de la poulie.



Dans les deux cas nous supposerons l'adhérence de la corde et de la poulie assez forte pour considérer la partie de la corde qui est en contact avec la

gorge comme faisant partie de la poulie. Cela posé, nous allons examiner successivement les conditions d'équilibre de la poulie fixe et de la poulie mobile.

216. **Poulie fixe; condition d'équilibre et pression sur l'axe.** — Nous supposerons la poulie réduite à sa section par un plan perpendiculaire à l'axe et la corde réduite à un fil. Soient alors A et B les points de tangence du fil et de la poulie et O le point de rencontre du plan de section avec l'axe. D'après la théorie des cordons (201), on peut supposer que la puissance et la résistance soient appliquées respectivement en A et en B. On est ainsi ramené à écrire la condition d'équilibre d'un corps qui a un axe fixe et qui est soumis à deux forces P et Q, c'est-à-dire à exprimer que la somme algébrique des moments par rapport à l'axe est nulle. Comme les deux forces sont à la même distance de l'axe, on doit avoir $P = Q$.



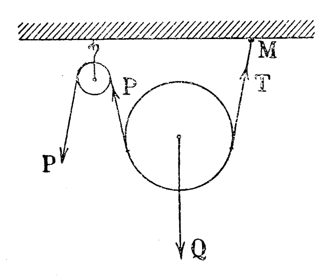
La pression sur l'axe est la résultante des deux forces P et Q. Si on la désigne par la lettre R et si l'on appelle 2α l'angle des deux cordons, en projetant sur la bissectrice de cet angle on a

$$R = P\cos\alpha + Q\cos\alpha = 2P\cos\alpha.$$

On voit en particulier que si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si les cordons sont parallèles, la charge de l'axe est égale au double de la résistance.

217. **Poulie mobile; condition d'équilibre.** — Soit Q la résistance et soit P la puissance, qui s'exerce intégralement par l'intermédiaire d'une poulie fixe (**216**); soit M le point fixe auquel est attachée l'une des extrémités de la corde. On peut considérer le système formé par la corde et la poulie comme

libre à condition de remplacer la fixité du point M par une force égale à la tension du cordon ; soit T cette tension. On a ainsi à exprimer l'équilibre d'un corps libre soumis à l'action des trois forces P, Q et T. Pour que ces trois forces se fassent équilibre, il faut d'abord qu'elles soient dans un même plan, qui sera nécessairement vertical si la résistance est un fardeau à soulever.



Soit O le point de rencontre de ce plan avec l'axe de la poulie ; en exprimant que la somme algébrique des moments par rapport au point O est nulle, on voit que l'on doit avoir aussi $T = P$. Enfin, la force Q devant être égale et opposée à la résultante des deux forces P et T, qui sont égales d'après ce que nous venons de voir, il faut que Q soit dirigée suivant la bissectrice de l'angle des deux cordons, ce qui montre que les deux cordons doivent être également inclinés sur l'horizon. D'ailleurs, on peut dire que Q est égale et opposée à la pression exercée sur l'axe par les deux forces égales P et T; de sorte que si l'on appelle 2α l'angle des deux cordons, on peut écrire, en vertu de la condition d'équilibre de la poulie fixe,

$$Q = 2P \cos \alpha,$$

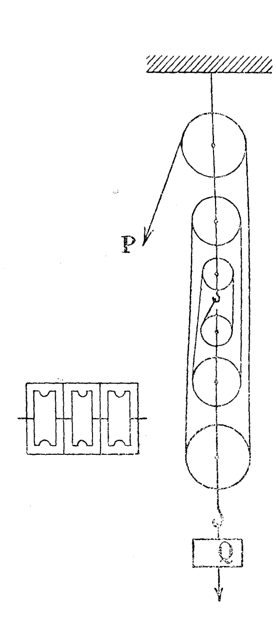
d'où

$$P = \frac{Q}{2 \cos \alpha}.$$

D'après cela, on voit que, si les cordons sont parallèles, α est nul, $\cos \alpha$ est égal à l'unité, et l'on peut faire équilibre à la force Q par une force P qui en est la moitié.

218. **Moufles et palans.** — On appelle *moufle* un ensemble de poulies montées sur une même chape et pouvant tourner séparément autour du même axe ou autour d'axes différents.

On appelle *palan* un système de deux moufles dont l'une est fixe et l'autre mobile. Un cordon, fixé à la moufle fixe par une disposition analogue à celle qui est figurée ci-contre, s'enroule sur la gorge de la première poulie de la moufle mobile, passe ensuite sur la gorge de la première poulie de la moufle fixe, puis de là sur la deuxième poulie de la moufle mobile, et ainsi de suite. Il passe une dernière fois sur la gorge d'une poulie appartenant à la moufle fixe, et c'est sur l'extrémité libre de ce cordon que l'on fait agir la puissance P. La résistance Q est appliquée à la chape de la moufle mobile.



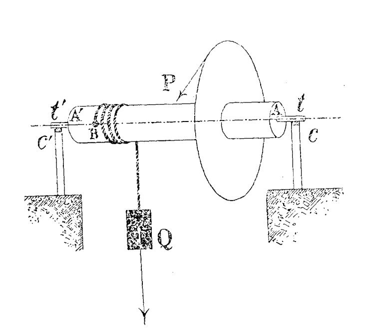
Pour simplifier on peut, sans erreur sensible, supposer tous les cordons parallèles et verticaux. En vertu de la théorie de la poulie fixe et de la poulie mobile, la tension en tous les points du cordon est égale à P ; on peut alors supposer que toutes les poulies de la moufle inférieure sont en équilibre sous l'action de la force Q. Dès lors si n est le nombre des poulies de la moufle inférieure, on voit que la résistance Q fait équilibre à $2n$ forces verticales égales à P ; par suite, on a

$$P = \frac{Q}{2n},$$

et l'on pourra vaincre une résistance donnée avec une puissance $2n$ fois plus faible.

219. **Description du treuil.** — Le *treuil* est un corps solide mobile autour d'un axe fixe. C'est généralement un cylindre appelé *arbre* et qui est mobile autour de son axe AA'. La fixité de l'axe est obtenue au moyen de deux tourillons t et

t' reposant sur deux coussinets c et c'. Sur la circonférence du cylindre s'enroule une corde dont une extrémité est fixée en un point B de l'arbre, et dont l'extrémité libre porte le fardeau à soulever ou *résistance* à vaincre. La puissance s'exerce soit en un point de la circonférence d'un cylindre ayant même axe que l'arbre mais un rayon plus grand, soit à l'extrémité d'une manivelle fixée à l'arbre. Lorsque l'arbre est vertical, le treuil prend le nom de *cabestan*.



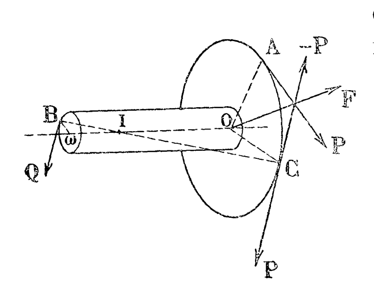
220. **Équilibre du treuil.** — Supposons que le centre de gravité de l'appareil se trouve sur l'axe et que la puissance et la résistance soient tangentes aux deux cylindres ; soient d'ailleurs R et r les rayons de ceux-ci. Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des moments par rapport à l'axe des deux cylindres soit nulle. Il faut donc d'abord que la puissance et la résistance fassent tourner le corps dans des sens différents et, ensuite, que l'on ait

$$PR = Qr,$$

en appelant R le rayon du grand cylindre et r celui du petit. Le poids des deux cylindres n'intervient pas dans l'équation d'équilibre, parce que leur centre de gravité est supposé sur l'axe. On peut du reste obtenir encore cette équation de la manière suivante :

Soient A et B les points d'application respectifs de la puissance et de la résistance. Figurons les sections des deux cylindres par les plans perpendiculaires à l'axe menés par les points A et B, et soient OA et ωB les rayons des sections qui aboutissent en ces points. La résistance étant verticale, le rayon ωB est horizontal ; soit alors OC le rayon horizontal de

la section droite menée par A. On ne change rien à l'état du corps en appliquant au point C les deux forces verticales P et — P ; or, les deux forces P et — P appliquées respectivement en A et en C ont une résultante, F, dirigée suivant leur bissectrice et qui est, par suite, détruite par la résistance de l'axe, puisqu'elle passe par le point O. Pour que le système soit en équilibre, il faut alors et il suffit que la résultante des deux forces parallèles et de même sens P et Q, appliquées respectivement en C et en B, soit appliquée au point de rencontre I de l'axe et de BC. Ceci exige que l'on ait



$$\frac{P}{Q} = \frac{IB}{IC};$$

mais la similitude des deux triangles IωB et IOC donne

$$\frac{IB}{IC} = \frac{\omega B}{OC} = \frac{r}{R};$$

par suite, on a $$\frac{P}{Q} = \frac{r}{R},$$

et enfin $$P.R = Q.r.$$

Nous retrouvons bien ainsi la condition d'équilibre obtenue plus haut.

On en déduit $$P = Q \cdot \frac{r}{R},$$

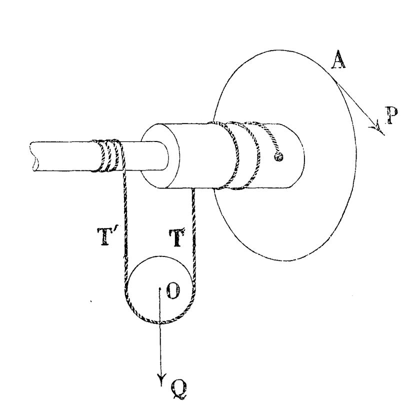
de sorte que si $\frac{r}{R}$ est très petit, la puissance P sera une fraction très petite de la résistance.

On peut donc, au moyen du treuil, vaincre une résistance donnée avec une puissance aussi petite que l'on veut, en prenant r suffisamment petit ou R suffisamment grand. En réalité, dans la pratique r et R ne peuvent dépasser certaines limites inférieures ou supérieures, à cause de la solidité de l'appareil.

Pour avoir la charge des tourillons, on décompose la force P + Q appliquée en I en deux autres p_1 et p_2,

appliquées aux deux tourillons ; on décompose de même la force F, appliquée au point O, en deux autres f_1 et f_2, appliquées respectivement aux mêmes points que p_1 et p_2. La charge du premier tourillon sera la résultante des deux forces p_1 et f_1 ; celle du second sera de même la résultante de p_2 et de f_2.

221. **Treuil différentiel.** — Comme toutes les machines que nous avons décrites jusqu'ici, le treuil différentiel a pour objet de vaincre une résistance donnée avec une puissance qui ne soit qu'une faible fraction de la résistance. Il se compose de deux cylindres de rayons différents mais de même axe. Une même corde s'enroule sur les deux cylindres, mais en sens inverse, de telle sorte que lorsqu'elle s'enroule sur l'un, elle se déroule de l'autre. Cette corde supporte une poulie mobile, à la chape de laquelle on attache le fardeau à soulever, c'est-à-dire la résistance Q qu'il s'agit de vaincre. Quant à la puissance, elle est appliquée tangentiellement à la circonférence d'une roue de même axe que les premiers cylindres, mais dont le rayon est beaucoup plus grand.



Cherchons la condition d'équilibre et, pour cela, remarquons que la poulie O étant elle-même en équilibre, la tension des cordons qui la supporte est égale à $\frac{Q}{2}$, en supposant, bien entendu, que ces cordons soient parallèles. Nous avons alors à exprimer qu'il y a équilibre entre les trois forces P, T' et T perpendiculaires toutes les trois à l'axe des cylindres, T' et T désignant les tensions des deux cordons. Il suffit, pour cela, d'exprimer que la somme algébrique de leurs moments par rapport à cet axe est nulle. Or, si l'on appelle R le rayon

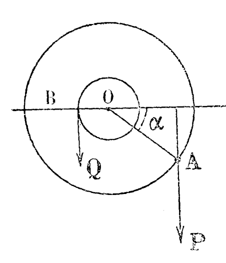
de la roue à laquelle est appliquée la force P, r le rayon du grand cylindre et r' le rayon du petit cylindre, les valeurs absolues des moments sont respectivement PR, Tr et $T'r'$, où d'ailleurs $T = T' = \frac{Q}{2}$. Le moment des deux forces T' et P étant de même sens, on en conclut l'équation d'équilibre

$$PR + T'r' = Tr\,;$$

on en déduit
$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{r - r'}{R},$$

ce qui montre que l'on peut prendre $r - r'$ assez petit pour que P soit une fraction aussi petite que l'on veut de la résistance.

222. **Treuil des carriers.** — Comme les treuils ordinaires, le *treuil des carriers* se compose d'un arbre auquel on applique la résistance et d'une roue de très grand rayon ayant même axe que l'arbre et sur laquelle on fait agir la puissance. Cette roue est garnie de chevilles permettant à un homme de se déplacer sur la circonférence de la roue comme sur une échelle. C'est le poids de l'homme qui remplace la puissance, de sorte que celle-ci est constante en grandeur et direction et que, seul, son point d'application varie.



Pour avoir la condition d'équilibre, projetons la figure sur un plan perpendiculaire à l'axe, et soient alors A et B les points d'application de la puissance et de la résistance. Soient aussi r le rayon de l'arbre, R celui de la roue et α l'angle du rayon OA avec l'horizon. En exprimant que la somme algébrique des moments par rapport à l'axe est nulle, on trouve sans difficulté l'équation d'équilibre :

$$Qr = P.R \cos \alpha.$$

Cette équation définit l'angle α, et on en tire

$$\cos \alpha = \frac{Qr}{PR},$$

ce qui montre que le problème n'est possible que si l'on a

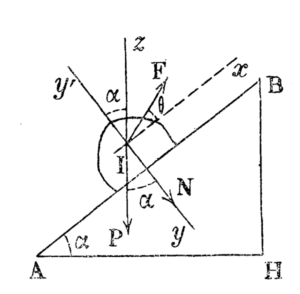
$$Qr < PR,$$

c'est-à-dire

$$Q < P\frac{R}{r}.$$

On a ainsi la limite de la charge qui peut être vaincue par une puissance donnée P.

223. Plan incliné. — Le plan incliné est une machine simple dont on se sert pour soulever un fardeau avec une puissance inférieure à son poids. Proposons-nous seulement d'étudier les conditions d'équilibre d'un corps de poids P, placé sur un plan incliné et soumis à l'action d'une force F de grandeur et de direction données. Il faut et il suffit, pour cela, que les deux forces P et F aient une résultante et que cette résultante tende à appliquer le corps contre le plan ; une première condition est donc que les deux forces P et F soient concourantes. De plus, comme la force P est verticale et que la résultante doit être normale au plan, la force F doit être située dans un plan vertical normal au plan incliné ; par suite, sa projection sur ce plan doit en être une ligne de plus grande pente. Prenons alors le plan vertical des deux forces comme plan du tableau, et soit AB la ligne de plus grande pente située dans ce plan et faisant l'angle α avec l'horizon. Soient d'autre part I le point d'application des deux forces F et P, θ l'angle que la ligne de plus grande pente du plan incliné fait avec F. Projetons les deux forces F et P sur les deux axes Ix et Iy. Pour qu'il y ait équilibre il faut et il suffit que la somme des projections sur Ix soit nulle et que la somme des projections sur Iy soit positive. La première condition est exprimée par l'équation



(1) $$F \cos \theta = P \sin \alpha :$$

c'est l'équation d'équilibre. La deuxième est exprimée par l'inégalité

(2) $P \cos \alpha + F \sin \theta > 0$, { en adoptant comme sens positif des angles le sens de Ix vers Iy.

Le premier membre de l'inégalité (2) représente précisément la pression exercée par le corps sur le plan incliné : nous l'appellerons R.

De l'équation (1) on tire d'ailleurs

$$(3) \qquad F = \frac{P \sin \alpha}{\cos \theta},$$

ce qui montre que $\cos \theta$ doit être positif et, par suite, que θ doit être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Si l'on porte cette valeur de F dans l'expression de R, on a

$$R = \frac{P \cos (\theta - \alpha)}{\cos \theta},$$

et, comme R doit être positive, que d'autre part $\cos \theta$ et P sont positifs, on doit avoir $\cos (\theta - \alpha) > 0$; donc $\theta - \alpha$ doit être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Il en résulte que θ doit être compris entre $-\frac{\pi}{2} + \alpha$ et $\frac{\pi}{2} + \alpha$; mais nous avons déjà montré que θ doit être compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; ces diverses conditions sont évidemment comprises dans les inégalités

$$\alpha - \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Si donc on prolonge vers le haut en Iz la verticale du point I, on voit que la force F doit être comprise dans l'angle zIy. Ajoutons que la formule (3) prouve que la force F est minimum lorsque $\cos \theta$ est maximum, c'est-à-dire lorsque $\theta = 0$; on a alors

$$F = P \sin \alpha,$$

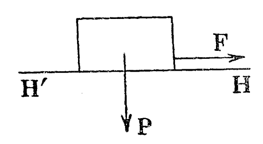
et la force est parallèle à la ligne de plus grande pente. Pour les valeurs limites, $\theta = \alpha - \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $F = P$ et $F = \infty$, résultats évidents *a priori*.

CHAPITRE XVI

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LE FROTTEMENT

224. **Frottement au départ et frottement pendant le mouvement.** — Nous avons, jusqu'ici, considéré les corps comme parfaitement polis et nous avons admis que si deux surfaces sont en contact par un point, elles exercent l'une sur l'autre une action normale au plan tangent commun. En réalité, les solides naturels ne sont jamais parfaitement polis ; leur contact, par suite des déformations qu'ils éprouvent, n'est jamais réduit à un point, et enfin l'expérience prouve que leur action mutuelle n'est jamais normale au plan tangent commun.

Considérons en effet un corps pesant, ayant par exemple la forme d'un parallélépipède rectangle, et placé sur un plan horizontal HH'. Le corps étant en équilibre, les actions du plan horizontal ont une résultante égale et opposée au poids du corps. Mais supposons que l'on fasse agir sur le corps une force F parallèle au plan HH', aussi rapprochée que possible de ce plan, dirigée vers le centre de gravité du corps, et dont nous supposerons que l'intensité varie à partir de zéro.



L'expérience prouve que le corps reste d'abord au repos et qu'il ne se met en mouvement que lorsque l'intensité de la force F a atteint une certaine valeur ψ, qui dépend du reste de la nature du corps et de celle du plan : cette force ψ est ce qu'on appelle la *force de frottement au départ* ; elle s'est développée au fur et à mesure que l'on a fait croître l'intensité de la force F. Imaginons maintenant que l'on donne à la force F une intensité $F_1 < \psi$: le corps restera au repos ; par conséquent, les actions du plan sur le corps auront une résultante faisant équilibre aux deux forces P et F et, par

suite, oblique au plan. Ceci montre bien que la réaction du plan sur le corps n'est pas toujours normale à la surface de séparation.

Imaginons enfin que l'on fasse agir une force F, d'intensité $F_2 > \psi$: alors le corps se met en mouvement, et si à un instant quelconque la force F_2 cesse d'agir, on constate que le mouvement est uniformément retardé. Tout se passe donc comme si, pendant le mouvement, le corps était soumis à une force ψ' de valeur constante, agissant en sens inverse du mouvement. Cette force ψ' s'appelle la *force de frottement pendant le mouvement ;* elle est en général un peu inférieure à la force de frottement au départ.

225. **Lois du frottement de glissement.** — Les lois du frottement ont été étudiées successivement par Coulomb et par le général Morin.

L'appareil employé par Coulomb se compose d'un madrier sur lequel est placée une caisse qu'on peut remplir avec des poids. Un cordon, fixé à la caisse, passe sur une poulie et supporte un plateau où l'on met d'autres poids. Le madrier et le fond de la caisse sont recouverts par la substance dont on veut étudier les lois du frottement. Le poids de la caisse et du contenu donne la pression normale, et si le mouvement commence à se produire, le plateau et son contenu donnent le frottement au départ. Si enfin on obtient un mouvement uniforme, le plateau et son contenu font connaître la force de frottement pendant le mouvement.

Au moyen de cet appareil Coulomb a trouvé, pour le frottement au départ, les lois suivantes, qui ont été vérifiées ensuite par le général Morin :

1° *Le frottement au départ est proportionnel à la pression normale ;*

2° *Il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact ;*

3° *Il dépend de la nature des corps.*

Quand le corps est en mouvement, aux lois précédentes il faut joindre la suivante :

La force de frottement pendant le mouvement est indépendante de la vitesse, pourvu que la vitesse soit inférieure à une certaine limite.

226. Coefficient de frottement. — On appelle *coefficient* de frottement, et on désigne par f, le rapport constant du frottement au départ à la pression normale. Si ψ est le frottement au départ et si N est la pression normale, on a

$$f = \frac{\psi}{N}.$$

On appelle *angle de frottement* l'angle φ, plus petit que 90°, dont la tangente est égale à f, c'est-à-dire l'angle φ défini par l'équation

$$\text{tg}\, \varphi = f.$$

227. Application I. — *Équilibre d'un corps pesant placé sur un plan incliné.*

Soient P le poids du corps et α l'angle du plan incliné avec le plan horizontal. En se reportant à la figure du numéro 223, on voit que la pression normale est égale à $P \cos \alpha$; par suite, si f désigne le coefficient de frottement, la force de frottement au départ est $fP \cos \alpha$. Nous avons donc à exprimer qu'il y a équilibre entre la force verticale P et la force $fP \cos \alpha$, dirigée suivant la ligne de plus grande pente du plan incliné. En projetant sur la normale au plan, on trouve sans difficulté que la condition d'équilibre est

$$P \sin \alpha - fP \cos \alpha < 0.$$

On en tire $$\text{tg}\, \alpha \leqslant f,$$

et, en introduisant l'angle de frottement,

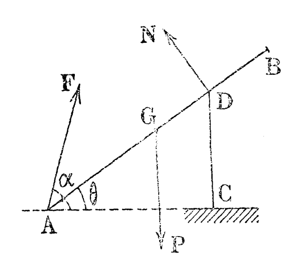
$$\text{tg}\, \alpha \leqslant \text{tg}\, \varphi,$$

c'est-à-dire $$\alpha \leqslant \varphi.$$

L'angle du plan incliné avec l'horizon doit donc être inférieur ou au plus égal à l'angle de frottement.

228. Application II. — *Une barre pesante* AB *s'appuie sur*

une règle verticale CD *et est soutenue par une force* F, *appliquée au point* A, *et dans une direction donnée; déterminer la position de la barre quand elle est sur le point de glisser dans le sens de* B *vers* A.



Soit P le poids de la barre, appliqué à son centre de gravité G. Posons $AG = a$, $GD = x$, et appelons θ l'inclinaison de la barre sur l'horizon, α celle de la force F; désignons enfin par N la réaction normale du point D sur la barre, c'est-à-dire la composante normale de la réaction du point D. Si f est le coefficient de frottement, la force de frottement au départ, dirigée suivant AB, est égale à fN.

Cela posé, au moment où la barre se met en mouvement, il y a équilibre entre les quatre forces P, F, fN et N. Il faut donc d'abord, comme il est facile de s'en assurer, que ces forces soient dans le même plan, qui sera bien entendu un plan vertical, puisqu'il contient la force P. Il faut en outre : 1° que si l'on projette sur deux axes rectangulaires situés dans ce plan, la somme algébrique des projections des forces soit nulle pour chacun des axes ; 2° que la somme algébrique des moments des forces par rapport à un point de ce plan soit nulle également. Projetons donc sur les deux axes rectangulaires, Ax, confondu avec AC, et Ay, perpendiculaire à Ax, et prenons les moments par rapport au point D ; nous obtenons ainsi les équations d'équilibre

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \cos \alpha = N \sin \theta + fN \cos \theta, \\ F \sin \alpha + N \cos \theta = fN \sin \theta + P, \\ Px \cos \theta = F(a + x) \sin (\alpha - \theta). \end{array} \right.$$

Soit φ l'angle de frottement ; en posant $f = \operatorname{tg} \varphi$ dans ces équations, les deux premières donnent facilement

$$\frac{F \sin \alpha - P}{F \cos \alpha} = \frac{\sin \theta \sin \varphi - \cos \theta \cos \varphi}{\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta}.$$

On en déduit $$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{F \cos \alpha}{P - F \sin \alpha},$$

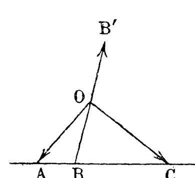
ce qui fait connaître θ, puisque l'on connaît φ. L'angle θ étant ainsi déterminé, on calculera x au moyen de la troisième équation (1) ; enfin, connaissant θ, l'une quelconque des deux premières équations (1) fera connaître N.

EXERCICES SUR LE LIVRE PREMIER

I. — Forces appliquées au même point.

1. La résultante de deux forces F et F′ ($F > F'$) appliquées au même point est égale à $2(F - F')$; calculer l'angle de ces deux forces.

2. On donne trois points A, B, C en ligne droite et un point O non situé sur la droite des trois points. On mène OA, OB, OC et l'on prolonge OB d'une longueur égale OB′ : prouver que la résultante des trois forces OA, OB′, OC rencontre AC en un point D tel que $CD = AB$.



3. Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC ; prouver que la résultante de trois forces appliquées au point O et représentées respectivement par OA, OB, OC passe par le centre du cercle des neuf points. Evaluer cette résultante.

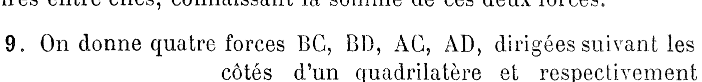
4. Un point matériel est attiré par n points fixes proportionnellement à la distance ; trouver la résultante des forces qui le sollicitent, montrer qu'elle passe par le centre des moyennes distances du système des n points et qu'elle est égale à n fois la distance du point au centre des moyennes distances. En déduire la position d'équilibre.

5. Deux forces font entre elles l'angle α ; déterminer cet angle par la condition que la résultante soit égale à chacune d'elles.

6. Trois forces appliquées aux milieux des côtés d'un triangle et perpendiculairement à ces côtés sont respectivement proportionnelles aux côtés auxquels elles sont appliquées. Elles sont de plus dirigées toutes les trois vers l'intérieur du triangle ou toutes les trois vers l'extérieur : trouver leur résultante et généraliser.

7. Deux forces P et Q font l'angle α ; déterminer cet angle par la condition que la résultante soit égale à $\frac{P + Q}{2}$. — Discussion. — Cas où $P = Q$.

8. Décomposer une force en deux autres qui soient perpendiculaires entre elles, connaissant la somme de ces deux forces.

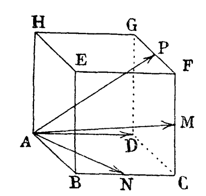


9. On donne quatre forces BC, BD, AC, AD, dirigées suivant les côtés d'un quadrilatère et respectivement égales à ces côtés ; trouver leur résultante, le quadrilatère étant d'ailleurs plan ou gauche.

10. Suivant les arêtes SA, SB, SC d'un tétraèdre on applique trois forces représentées par ces arêtes ; prouver que leur résultante passe par le centre de gravité du triangle ABC.

11. Décomposer une force en deux autres ayant une différence donnée et faisant entre elles un angle de 60°.

12. On donne un cube ABCDEFGH dans lequel N, M et P sont les milieux des arêtes respectives BC, CF et FG. Au sommet A de ce cube on applique les quatre forces AN, AD, AM et AP ; trouver les composantes de la résultante de ces quatre forces suivant les axes AB, AD, AH.



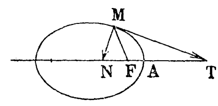
13. Équilibre d'un pendule électrique pesant repoussé par le point le plus bas de sa trajectoire par une force inversement proportionnelle au carré de la distance.

14. On considère un rectangle dont AB et CD sont deux côtés opposés ; trouver la position d'équilibre d'un point assujetti à rester sur CD et attiré en raison inverse de la distance par les points A et B. Calculer la pression exercée sur CD.

15. Équilibre d'un point pesant mobile sur un cercle vertical et attiré en raison inverse de la distance par les extrémités du diamètre horizontal du cercle.

16. Un point assujetti à rester sur une sphère est attiré par des points fixes proportionnellement à la distance ; trouver les positions d'équilibre.

17. Un point M est placé sur une ellipse dont F et A sont un foyer et le sommet correspondant. Ce point est sollicité par deux forces représentées par la tangente MT et par la normale MN : trouver la résultante de ces deux forces et déter-



miner le rayon vecteur $MF = r$ par la condition que la résultante passe par le sommet A.

18. Décomposer une force en deux autres F et F′ connaissant leur angle θ et leur rapport $\frac{F}{F'}$.

19. Étant donné un triangle ABC, on prend un point P sur le cercle des neuf points et l'on suppose ce point soumis à trois forces représentées par PA, PB, PC ; trouver le lieu de l'extrémité de la résultante de ces forces.

20. Un point matériel M est assujetti à rester sur une parabole de foyer F et est soumis à l'action de trois forces : une force verticale P ; une force répulsive émanant du foyer F et égale à $k.MF$; enfin une force attractive émanant de la tangente au sommet, perpendiculaire à cette droite et égale à $k.MI$, MI désignant la perpendiculaire menée du point M sur la tangente au sommet. Déterminer les positions d'équilibre du point et les pressions exercées sur la courbe quand l'équilibre est établi ; examiner si l'équilibre est stable ou instable.

21. Trois forces rectangulaires appliquées au même point sont proportionnelles aux nombres 1, 2, 3 ; déterminer les angles que fait la résultante avec chacune d'elles.

22. Trouver la position d'équilibre d'un point matériel attiré par les sommets d'un triangle par des forces constantes, proportionnelles aux côtés opposés.

II. — Forces parallèles et centres de gravité.

23. Aux sommets B et C des angles égaux d'un triangle isocèle ABC on applique deux forces égales à P, parallèles et de même sens. Exprimer en fonction de P et de l'angle A l'intensité Q de la force qu'il faut appliquer en A, parallèlement aux deux autres, pour que la résultante des trois forces passe par le point de concours des hauteurs. Pour quelles valeurs de A a-t-on $Q = P$?

24. Aux sommets A, B, C, D, E, F d'un hexagone régulier on applique des forces parallèles et de même sens, égales respectivement à 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; prouver que le centre de ce système de forces est sur BE et le déterminer.

25. A, B, C étant les sommets d'un triangle donné, dans quels rapports doivent être des forces parallèles appliquées en ces points

pour que le centre de ces forces coïncide : 1° avec le point de concours des hauteurs du triangle ; 2° avec le centre du cercle inscrit ; 3° avec le centre de l'un des cercles exinscrits.

26. Aux trois sommets d'un triangle ABC dont les angles sont aigus, on applique trois forces parallèles, de même sens et égales à tg A, tg B, tg C. Trouver le point d'application de leur résultante et montrer que la grandeur de cette résultante est égale à tg A. tg B. tg C.

27. On donne un polygone plan et convexe ABC .. et un point O intérieur à ce polygone ; on mène les droites OA, OB, OC, ... et, aux points A', B', C', .. , milieux respectifs de OA, OB, OC, ..., on applique des forces parallèles et de même sens respectivement proportionnelles à OA, OB, OC, ... ; trouver le centre de ce système de forces parallèles.

28. Décomposer une force donnée F en quatre forces parallèles appliquées aux quatre sommets d'un tétraèdre, en supposant que le point d'application de cette force ne puisse pas être déplacé.

29. Trouver le centre de gravité de cinq côtés d'un hexagone régulier.

30. Trouver le centre de gravité du périmètre d'un demi-hexagone régulier.

31. Trouver le centre de gravité du périmètre d'un quadrilatère plan ou gauche.

32. Trouver le centre de gravité du périmètre d'un tétraèdre.

33. Trouver le centre de gravité de cinq des triangles formés, dans un hexagone régulier, en joignant chaque sommet au centre.

34. Étant donné un rectangle ABCD, déterminer un point M qui soit le centre de gravité de la partie restante quand on enlève le triangle MCD. Cas où le rectangle devient un carré.

35. Centre de gravité de l'aire formée par un triangle rectangle et les carrés construits sur les côtés.

36. On donne une suite de circonférences dont les centres sont en ligne droite, qui sont tangentes extérieurement et dont les rayons forment une progression géométrique décroissante : centre de gravité du système prolongé indéfiniment.

37. AB et BC sont deux côtés consécutifs d'un carré ABCD ; on joint les points E et F, milieux de ces côtés, et l'on enlève le triangle EBF ainsi formé : centre de gravité du polygone restant.

38. Dans un triangle équilatéral ABC dont le côté est a, on enlève un disque de rayon r, et dont le centre O se trouve sur la hauteur AH, à une distance d du centre de gravité G du triangle. Trouver le centre de gravité de la partie restante et déterminer r de façon qu'il soit le plus près possible de la base BC. — Peut-on déterminer r par la condition que ce centre de gravité soit symétrique du point O par rapport au point G ?

39. Trouver le centre de gravité d'un triangle équilatéral dont on enlève le carré inscrit.

40. Centre de gravité du segment de cercle qui correspond à l'angle de 60°.

41. On donne un hexagone régulier ABCDEF, de côté $AB = a$, et l'on en détache un triangle ABC formé par trois côtés consécutifs. Déterminer le centre de gravité G de la surface pentagonale ACDEF.

On joint le point G aux cinq points A, C, D, E, F et l'on suppose que ces droites représentent cinq forces appliquées au point G : trouver leur résultante.

42. Dans n rondelles d'égale épaisseur et de rayons proportionnels à 1, 3, 5, .. on découpe des secteurs ayant même angle au centre. On superpose ces secteurs dans leur ordre de grandeur et de façon que leurs bords rectilignes soient dans deux plans verticaux. Montrer que les distances à l'intersection des deux plans des centres de gravité de la pile ainsi formée et du premier secteur ont un rapport égal à $\frac{3n(2n^2 - 1)}{4n^2 - 1}$.

43. Dans un cône de révolution dont l'ouverture est 2α, on inscrit n sphères tangentes extérieurement ; le rayon de la sphère la plus rapprochée du sommet étant r, déterminer le centre de gravité de ce système de sphères.

44. Centre de gravité de la surface latérale d'un cône circulaire droit.

45. Centre de gravité de la surface latérale d'un tronc de cône circulaire droit.

46. Sur une droite et en des points également distants les uns des autres, on applique n poids dont chacun est représenté par son numéro d'ordre augmenté du poids précédent : trouver la résultante et le centre de gravité du système.

47. Trouver le centre de gravité d'un segment de sphère à une base.

48. Trouver un cône pour lequel le centre de gravité du volume se confonde avec celui de la surface totale.

49. Un cylindre est terminé par une demi-sphère. Centre de gravité du système.

50. Étant données deux figures situées dans le même plan, mener par un point de ce plan une droite telle qu'en faisant tourner les deux figures autour de cette droite les surfaces ou les volumes engendrés soient dans un rapport donné. — Cas où les figures sont homothétiques par rapport au point fixe.

51. Un cube non homogène repose par sa base sur un plan horizontal. La densité qui est la même en tous les points d'une tranche horizontale varie à mesure qu'on s'élève :

1° Proportionnellement à la distance à la base ;

2° Proportionnellement à cette distance.

Trouver, dans chaque cas, le centre de gravité.

52. Centre de gravité du solide formé par deux cônes de hauteurs différentes et accolés par leurs bases.

53. A trois des sommets d'un parallélogramme on applique trois forces F parallèles, égales et de même sens, et au quatrième sommet une force F parallèle aux premières, égale et de sens contraire. En quel point du plan faut-il appliquer une force inconnue pour qu'il y ait équilibre ? Quelle est cette force ?

54. On donne un triangle quelconque ABC pesant 50^{kg}. On mène une transversale BD sur laquelle on prend $DE = \frac{BD}{6}$. Le point E est fixe et l'on place en A un poids de 100^{kg}. Quels sont les poids que l'on doit placer en B et en C pour que le triangle se tienne horizontal ?

55. Centre de gravité de quatre poids égaux placés aux sommets d'un trapèze.

III. — Forces appliquées à un corps solide.

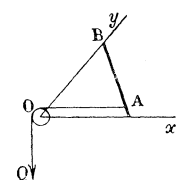
56. On donne un polygone convexe et l'on considère des forces appliquées aux milieux des côtés, égales et perpendiculaires à ces côtés et dirigées, soit toutes vers l'intérieur du polygone, soit toutes vers l'extérieur ; trouver leur résultante.

Comment pourrait-on étendre la question à un tétraèdre ou à un polyèdre quelconque?

57. Équilibre d'une barre pesante dans un hémisphère.

58. Équilibre d'une barre pesante le long d'un mur vertical, sachant qu'elle est suspendue par un cordon de longueur donnée.

59. Équilibre d'une barre pesante AB, placée dans un angle xOy et au point A de laquelle est attaché un cordon passant sur une poulie placée au sommet de l'angle et supportant un poids Q.

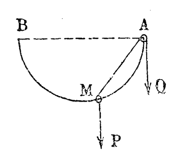


Le côté Ox est supposé horizontal et les dimensions de la poulie sont négligeables.

60. Soient A et B deux points situés sur la même horizontale. Au point A est attaché un cordon de longueur donnée a, dont l'autre extrémité porte un anneau C. Au point B est attachée l'une des extrémités d'un autre cordon dont l'autre extrémité passe dans l'anneau C et supporte ensuite un poids Q. Equilibre du système.

61. Une ellipse pesante et homogène dont le plan est vertical est posée sur une droite horizontale située dans ce plan ; aux foyers de cette ellipse sont appliqués deux poids inégaux P et Q. On suppose l'équilibre établi et l'on demande de déterminer les rayons vecteurs du point de contact de l'ellipse avec l'horizontale, ainsi que l'angle que fait le grand axe avec cette droite.

62. On donne une demi-circonférence AB dont le bord A porte une poulie infiniment petite, sur laquelle passe un cordon supportant un poids Q. La seconde extrémité du cordon est attachée à un anneau assujetti à rester sur la demi-circonférence et de poids P : équilibre du système.



63. Une tige homogène AB, de poids P, est mobile autour d'un point A et supporte un poids P' appliqué en un point C tel que $AC = d$. En quel

point D faut-il appliquer une force donnée Q perpendiculaire à AB pour qu'il y ait équilibre ?

64. Montrer que les forces appliquées à un corps solide peuvent être réduites à deux forces rectangulaires, dont l'une passe par un point donné.

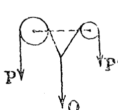
65. Montrer que les forces appliquées à un corps solide peuvent être réduites à deux, faisant un angle donné.

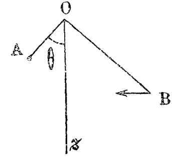
66. Si l'on a réduit à une force unique et à un couple toutes les forces appliquées à un corps solide, en prenant un centre de réduction, montrer que la projection de l'axe du couple résultant sur la résultante générale est constante quel que soit le centre de réduction.

67. Si l'on a réduit à deux les forces appliquées à un corps solide, le volume du tétraèdre dont ces deux forces sont deux arêtes opposées est constant, quelle que soit la réduction.

68. Y a-t-il dans un corps solide des points tels qu'en prenant chacun d'eux comme centre de réduction l'axe du couple résultant soit parallèle à la résultante générale ?

69. Deux poulies dont les centres sont sur la même horizontale supportent un cordon auquel sont suspendus les poids P, Q, P' : équilibre du système.

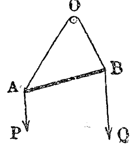




70. Un levier AOB, coudé à angle droit, est formé de deux barres de longueurs $2a$ et $2b$ et de poids P et P' ; il est mobile autour du point O et est sollicité en B par une force horizontale dont on demande l'intensité quand OA fait un angle θ avec la verticale.

71. Une barre rigide pesante s'appuie sur un mur vertical par une de ses extrémités, et sur un plan horizontal par l'autre ; celle-ci porte d'ailleurs un poids P. Trouver la position d'équilibre en tenant compte du frottement.

72. Équilibre de deux points matériels pesants assujettis à rester sur un cercle, et reliés par un cordon de longueur donnée passant sur le cercle.

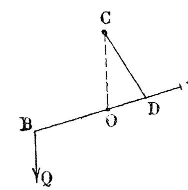


73. Équilibre d'une barre pesante soutenue par un cordon qui passe sur une poulie et dont les extrémités A et B portent les poids P et Q.

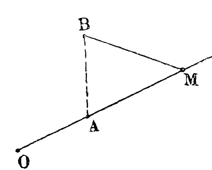
74. Équilibre de trois sphères placées dans une coupe hémisphérique.

75. Équilibre d'une lame pesante ayant la forme d'un triangle isocèle et placée dans une coupe hémisphérique.

76. Une barre pesante AOB est mobile autour de son milieu O et porte un poids Q à son extrémité B. Une autre barre pesante est mobile autour d'un point C situé sur la verticale du point O et tel que $OA = OB = OC$; elle s'appuie sur AB par sa deuxième extrémité D. Équilibre du système.



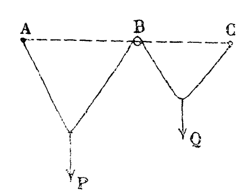
77. Une barre rigide non pesante OAM est mobile autour du point O. On veut la maintenir horizontale en la chargeant d'un poids P appliqué en A et en faisant agir sur M une force Q dont la direction passe par un point B, donné, sur la verticale du point A.



1° Calculer Q connaissant OA, OM et AB.

2° Déterminer la longueur minimum qu'il faut donner à OM pour que la force Q soit la plus petite possible.

78. On donne trois points A, B, C sur la même horizontale et tels que $AB = a$, $CB = b$. Une corde de longueur $2l + 2l'$ est fixée en A et C et passe en B sur une poulie fixe; elle supporte des poids P et Q. Déterminer le rapport $\frac{P}{Q}$ de manière que les cordons soient égaux à $2l$ et à $2l'$ quand l'équilibre est établi.



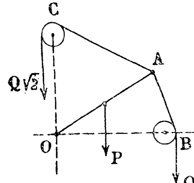
79. Décomposer le poids d'un triangle ABC en quatre forces appliquées en B, en C et en deux points inconnus sur AB et sur AC.

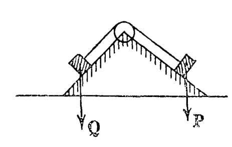
80. On donne un polygone ABC... ; suivant les directions des côtés sont appliquées des forces F_1, F_2, ... qui leur sont proportionnelles. Prouver que le système se réduit à un couple dont le moment est proportionnel à la surface du polygone.

81. On donne trois points A, B, C sur la circonférence d'un cercle mobile autour de son centre ; en A et en B sont appliquées deux forces données F_1 et F_2. Trouver la force F_3 qu'il faut appliquer au point C pour que le cercle soit en équilibre. — Minimum de F_3.

82. Équilibre d'un triangle équilatéral dont un sommet s'appuie sur un mur et qui est soutenu par un cordon de longueur donnée passant par le milieu d'un côté.

83. Une barre pesante OA, de poids P, est mobile autour d'un point O. A son extrémité sont attachés deux cordons qui passent sur deux poulies B et C, l'une sur l'horizontale, l'autre sur la verticale du point O et telles que $OB = OC = OA$. Equilibre du système de deux poids Q et $Q\sqrt{2}$ appliqués respectivement en B et en C.





84. Equilibre de deux poids P et Q placés sur deux plans inclinés et reliés par un cordon qui passe sur une poulie placée sur l'arête des deux plans.

85. Équilibre de deux points matériels pesants assujettis à rester sur un cercle et reliés par un cordon de longueur donnée, passant par l'extrémité du diamètre vertical.

86. Équilibre d'une barre pesante et homogène dont les extrémités s'appuient sur un plan vertical et sur un plan horizontal. On supposera connu le coefficient de frottement.

87. Équilibre d'une porte qui peut tourner autour d'un axe faisant un angle avec la verticale. A son centre de gravité est attaché un cordon qui passe sur une poulie placée dans un plan vertical contenant l'axe, dans un plan perpendiculaire à cet axe passant par G et telle que sa distance à l'axe soit la distance de l'axe au point G. La deuxième extrémité du cordon porte un poids P.

88. On donne un cercle vertical et un point C sur la verticale du centre. Un anneau A, de poids P, mobile sur le cercle, porte un cordon qui passe en C sur une poulie et supporte un poids Q. Équilibre du système.

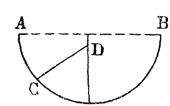
89. Même problème en supposant que le point C soit l'une des extrémités du diamètre horizontal du cercle.

90. Un quadrilatère matériel ABCD dans lequel on a

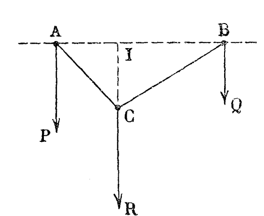
$$\text{angle } B = 90^\circ, \qquad AB = BC, \qquad CD = DA,$$

repose par le plus petit côté AB sur un plan horizontal. Entre quelles limites doit être compris le rapport $\frac{AD}{AB}$ pour que l'équilibre existe ?

91. On donne un demi-cercle AB situé dans un plan vertical et l'on suppose qu'une barre CD de longueur a s'appuie sur le demi-cercle et sur son rayon vertical limité au centre. Déterminer la position d'équilibre et examiner si l'équilibre est stable ou instable.



92 Deux poids P et Q sont suspendus à des cordons qui, après avoir passé sur deux poulies A et B de rayons très petits, se terminent en nœud C auquel est suspendu un poids R ; les points A et B sont sur la même horizontale.



1° Trouver des formules logarithmiques pour calculer les angles x et y que doivent faire les cordons CA et CB avec la verticale du point C quand l'équilibre est établi.

2° Montrer que le problème n'est possible que si chacune des forces P, Q, R est plus petite que la somme des deux autres.

3° Examiner le cas où $R^2 = P^2 + Q^2$, et trouver, dans ce cas, la valeur de l'angle ACB et celle du rapport $\frac{IA}{IB}$, I désignant l'intersection de la verticale du point C avec l'horizontale AB.

93. Un levier coudé à angle droit, pesant et homogène, dont les bras de levier ont des longueurs $2a$ et $2b$, est mobile autour d'un point O. Trouver l'inclinaison par rapport à la verticale du point O du bras de longueur $2a$ lorsque l'équilibre est établi.

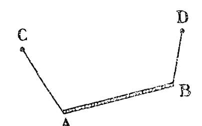
94. Étant donné un rectangle ABCD, on propose de déterminer sur la base supérieure AB un point E tel, que si l'on détache le

triangle BCE et que l'on suspende le trapèze AECD par le point E, la base inférieure CD soit horizontale.

95. Un triangle ABC s'appuie par deux de ses sommets B et C sur un cercle vertical fixe dont le rayon est égal à celui du cercle circonscrit au triangle.

1° Position d'équilibre ; 2° Stabilité ; 3° Réactions du cercle en B et en C.

96. Une barre pesante AB est portée horizontalement par deux fils AC et BD dont les longueurs sont données. L'extrémité C du premier fil étant fixe, où faut-il prendre l'extrémité D du second pour qu'il y ait équilibre, tout restant dans un plan vertical ?



LIVRE II

CINÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER

VITESSE DANS UN MOUVEMENT QUELCONQUE

229. **Du temps et de sa mesure.** — La cinématique, dont l'objet a déjà été défini, est une science abstraite analogue à la géométrie et où, indépendamment des notions habituelles de la géométrie, on fait usage d'une notion nouvelle qui est la notion de *durée* ou de *temps*.

On a la notion d'une durée et l'on conçoit l'égalité de deux durées, d'où il suit que le temps est une grandeur mesurable. On prend habituellement pour unité de mesure la seconde de temps moyen, parce qu'elle est liée au mouvement des astres.

Dès que l'on sait mesurer une durée, on peut fixer un instant quelconque I par rapport à un autre instant O pris pour origine, au moyen du nombre d'unités de temps écoulées de l'une à l'autre, et en convenant d'affecter ce nombre du signe + ou du signe — suivant que l'instant I considéré est postérieur ou antérieur à l'instant origine. Appelons *abscisse* de l'instant I ce nombre ainsi affecté d'un signe, et soient t et t' les abscisses de deux extrémités I et I' : l'abscisse de l'instant I' par rapport à I sera $t' - t$ en grandeur et en signe.

230. **Trajectoire.** — Nous avons appelé *trajectoire* d'un point mobile le lieu géométrique des positions successives occupées par ce point dans l'espace.

Ce lieu peut être une ligne droite ou une ligne courbe ; on dit, dans le premier cas, que le mouvement est *rectiligne*, et qu'il est *curviligne* dans le second. Nous nous occuperons surtout des mouvements rectilignes.

231. Équation du mouvement. — Soit $x'x$ la trajectoire d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne ; le mouvement du mobile est complètement défini si l'on connaît à chaque instant la position qu'il occupe sur sa trajectoire. Or, prenons sur $x'x$ un point fixe O, fixons un sens positif de parcours, par exemple le sens de gauche à droite, et appelons x le chemin variable, positif ou négatif, parcouru par le mobile à partir du point O ; il est clair que l'on connaîtra à chaque instant la position du mobile sur sa trajectoire si l'on connaît la relation qui lie x au temps. Cette relation, que nous supposerons mise sous la forme

$$x = f(t),$$

s'appelle l'*équation du mouvement* ou la *formule des espaces*.

232. Mouvement uniforme et mouvement varié. — On dit qu'un mouvement rectiligne est *uniforme* quand les espaces parcourus pendant des temps égaux sont égaux. Tout mouvement qui n'est pas uniforme est un mouvement *varié*.

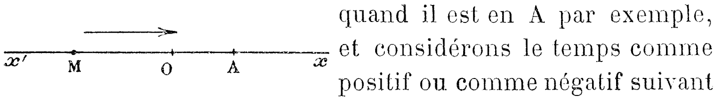
233. Vitesse dans le mouvement rectiligne et uniforme. — On appelle *vitesse* dans un mouvement rectiligne et uniforme, l'espace parcouru pendant l'unité de temps et mesuré à l'aide d'une unité arbitraire, le mètre par exemple. En vertu de ce qui précède (231), ce nombre peut être positif ou négatif suivant que le mobile se déplace sur sa trajectoire dans le sens adopté comme sens positif ou en sens contraire. Supposons, par exemple, que le mouvement s'effectue dans le sens de x' vers x, et soient A et A′ ses positions respectives aux instants t et $t+1$, séparées par la distance d ; si l'on a choisi le sens qui va de x' vers x comme sens positif

de parcours, la vitesse est d ; dans le cas contraire, elle est $-d$.

Quoi qu'il en soit, on voit qu'on peut la représenter par un vecteur AA′ dont la valeur absolue est la même que celle de la vitesse, et dont le sens est le même que celui du mouvement.

234. **Formule des espaces dans le mouvement rectiligne et uniforme.** — Il est aisé de voir qu'un mouvement rectiligne et uniforme est complètement défini quand on en connaît la vitesse. Soit en effet $x'x$ la trajectoire sur laquelle nous fixerons un sens positif, le sens de x' vers x, et une origine O.

Concevons que l'on observe le mobile à un instant donné, quand il est en A par exemple, et considérons le temps comme positif ou comme négatif suivant qu'il est postérieur ou antérieur à cet instant. Appelons *instant origine* ou temps zéro l'instant où le mobile passe en A, et soit t un intervalle de temps quelconque, positif ou négatif, compté à partir du temps zéro. Appelons enfin v la vitesse du mobile, c'est-à-dire le segment algébrique parcouru par lui pendant une unité de temps ; le nombre v est positif ou négatif suivant que le mouvement s'effectue dans le sens positif ou dans le sens négatif.



Cela posé, appelons M la position du mobile au temps t et proposons-nous de calculer le segment algébrique OM connaissant le segment algébrique OA, le temps t et la vitesse v. On a

$$\mathrm{OA} + \mathrm{AM} + \mathrm{MO} = 0,$$

et, par suite, $\mathrm{OA} + \mathrm{AM} + \mathrm{MO} + \mathrm{OM} = \mathrm{OM}$;

et, comme $\mathrm{MO} + \mathrm{OM} = 0$, il s'ensuit que

$$\mathrm{OM} = \mathrm{OA} + \mathrm{AM}.$$

Tout revient donc à calculer le segment algébrique AM. Or, il est clair que la longueur de ce segment est égale à la valeur absolue du produit vt ; il reste à prouver que les signes sont les mêmes. Il faut pour cela distinguer quatre cas suivant les signes de v et de t, savoir :

1° v et t tous deux positifs ; 2° v et t tous deux négatifs ; 3° v positif et t négatif ; 4° v négatif et t positif. — Nous nous bornerons à en examiner un, le raisonnement étant le même pour tous. Supposons par exemple v positif et t négatif ; le mouvement s'effectue dans le sens positif, mais t étant négatif, l'instant où le mobile est en M est antérieur à celui où il est en A, donc le segment AM est négatif, comme le produit vt, et l'on a

$$AM = vt.$$

Si donc x_0 est l'abscisse du point A et x l'abscisse du point M, on a la formule

$$x = x_0 + vt,$$

qui définit complètement le mouvement, puisqu'elle donne à chaque instant l'espace parcouru.

235. Remarque. — La vitesse dans un mouvement uniforme est égale au quotient de l'espace parcouru par le temps employé à le parcourir, car la formule que nous venons d'établir donne

$$v = \frac{x - x_0}{t}.$$

236. **Vitesse moyenne et vitesse à un instant donné dans un mouvement rectiligne et varié.** — Lorsque le mouvement d'un mobile n'est pas uniforme, il est naturel pour s'en faire une idée, de le comparer à celui d'un autre mobile animé d'un mouvement uniforme et qui parcourrait le même chemin pendant le même temps. Soit x l'espace parcouru par le premier mobile, pendant le temps t ; si le second mobile parcourt cet espace d'un mouvement uniforme et pendant le même temps, sa vitesse, d'après ce qui précède, serait $\frac{x}{t}$: ce quotient $\frac{x}{t}$ s'appelle la *vitesse moyenne* du mobile pendant l'intervalle de temps t. Ainsi, on appelle vitesse moyenne d'un mouvement varié, pendant un intervalle de temps t, le quotient de l'espace parcouru pendant cet intervalle de temps par le temps employé à le parcourir.

Supposons que l'on considère le mouvement pendant un intervalle de temps très court, de l'instant t à l'instant $t + \Delta t$,

et soit Δx l'espace parcouru pendant ce temps ; l'expression de la vitesse moyenne, pendant l'intervalle de temps Δt, est alors $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, et l'on appelle *vitesse* du mobile à l'instant t la limite de la vitesse moyenne $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro. Par définition même, la vitesse à l'instant t est donc égale à la dérivée de l'espace par rapport au temps ; de sorte que si

$$x = f(t)$$

est la formule des espaces, la vitesse à un instant quelconque sera donnée par la formule

$$v = f'(t),$$

qu'on appelle la *formule des vitesses*.

Par exemple, si la formule des espaces est

$$x = a + bt + ct^2,$$

la formule des vitesses est

$$v = b + 2ct ;$$

si la formule des espaces est

$$x = a \sin \alpha t + b \cos \alpha t,$$

celle des vitesses est

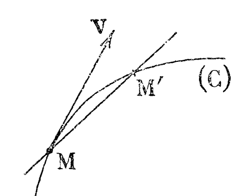
$$v = \alpha(a \cos \alpha t - b \sin \alpha t),$$

etc.

Appelons M la position du mobile sur sa trajectoire $x'x$, à l'instant t. On *convient* de représenter la vitesse à cet instant par un vecteur MV mesuré par le même nombre que la vitesse et porté dans le sens du mouvement. Cette convention n'est que l'extension de celle qui est relative à la représentation géométrique de la vitesse dans le mouvement uniforme ; car, par définition, la vitesse à un instant donné n'est autre chose que la vitesse d'un certain mouvement uniforme.

237. **Vitesse dans un mouvement curviligne quelconque.** — Considérons maintenant un mouvement curviligne quelconque. Soit (C) la trajectoire sur laquelle nous fixerons conventionnellement un sens positif de parcours, et soient M et M' les

positions du mobile sur sa trajectoire, aux instants t et $t+\Delta t$. Si l'on suppose Δt très petit, on a une idée approchée du mouvement en le comparant à celui d'un mobile qui parcourrait la corde MM′ pendant le temps Δt.



Le rapport $\dfrac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$ s'appelle la *vitesse moyenne* du mobile considéré pendant l'intervalle de temps Δt : c'est la vitesse d'un mouvement uniforme suivant la corde MM′ et en vertu duquel l'espace parcouru pendant le temps Δt est égal à la corde MM′ ; par conséquent, si l'on se reporte à la représentation géométrique de la vitesse dans un mouvement uniforme, cette vitesse moyenne sera représentée par un vecteur dont la valeur absolue est la même que celle du rapport $\dfrac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$ et qui est porté dans le sens du mouvement.

Lorsque Δt tend vers zéro, le point M′ se rapproche indéfiniment du point M ; le rapport $\dfrac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$ tend généralement vers une limite v, et enfin le vecteur qui représente la vitesse moyenne tend vers une position limite tangente en M à la trajectoire et dont la longueur est v. Ce vecteur limite MV s'appelle la *vitesse* du mouvement curviligne à l'instant t. On a d'ailleurs

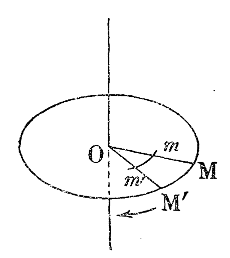
$$\frac{\text{corde MM}'}{\Delta t} = \frac{\text{corde MM}'}{\text{arc MM}'} \times \frac{\text{arc MM}'}{\Delta t}.$$

Lorsque Δt tend vers zéro et, par suite, que M′ se rapproche indéfiniment du point M, *on démontre* que le rapport $\dfrac{\text{corde MM}'}{\text{arc MM}'}$ a une limite égale à l'unité. Il en résulte que la limite de $\dfrac{\text{corde MM}'}{\Delta t}$ est la même que celle du rapport $\dfrac{\text{arc MM}'}{\Delta t}$, ce qui montre que *la vitesse à l'instant t est encore égale, en grandeur, à la limite du rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, c'est-à-dire à la dérivée de l'espace par rapport au temps.*

238. **Mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe ; vitesse angulaire.** — Supposons par exemple que la trajectoire soit un cercle de centre O : on dit alors que le mobile est animé d'un mouvement de *rotation* autour d'un axe qui est la perpendiculaire au plan du cercle menée par le point O. On dit d'ailleurs que le mouvement de rotation est *uniforme* quand le mobile parcourt des arcs égaux pendant des temps égaux. Si l'on appelle v l'arc parcouru pendant l'unité de temps, en recommençant le raisonnement qui a été fait pour le mouvement rectiligne et uniforme, on voit que la formule des espaces est encore $x = x_0 + vt,$
et la vitesse à un instant quelconque est constante en grandeur et égale à v.

Quand un corps solide tourne autour d'un axe, chacun de ses points décrit une circonférence ayant son centre sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à cette droite. Tous les points du corps tournent du même angle pendant le même temps, c'est-à-dire que les arcs qu'ils parcourent pendant le même temps, sur leurs trajectoires respectives, ont la même graduation. Il en résulte que tous les points situés à la même distance de l'axe sont animés de la même vitesse au même instant ; on appelle alors *vitesse angulaire de rotation*, à un instant donné, la grandeur de la vitesse à cet instant d'un point quelconque situé à l'unité de distance de l'axe. Lorsque le mouvement est uniforme, la vitesse angulaire est évidemment constante.

Connaissant la distance r d'un point M du corps à l'axe et la vitesse angulaire ω à un instant donné t, il est facile de calculer la grandeur v de la vitesse du point M à cet instant. Soient en effet M et M′ les positions du point sur sa trajectoire aux instants t et $t + \Delta t$, et soit O le centre de la trajectoire. Considérons le point m du corps situé sur le rayon OM et à une distance de l'axe égale à l'unité ; soit mm' l'arc de même centre que MM′



parcouru par ce point pendant le temps Δt. On a évidemment

$$\frac{\text{arc MM}'}{\text{arc } mm'} = \frac{\text{OM}}{\text{O}m},$$

c'est-à-dire, puisque $\text{OM} = r$ et $\text{O}m = 1$,

$$\frac{\text{arc MM}'}{\text{arc } mm'} = r,$$

d'où $$\text{arc MM}' = r . \text{arc } mm'.$$

On en déduit successivement

$$\frac{\text{arc MM}'}{\Delta t} = r \cdot \frac{\text{arc } mm'}{\Delta t}$$

et $$\lim \frac{\text{arc MM}'}{\Delta t} = r \lim \frac{\text{arc } mm'}{\Delta t},$$

c'est-à-dire $$v = \omega r.$$

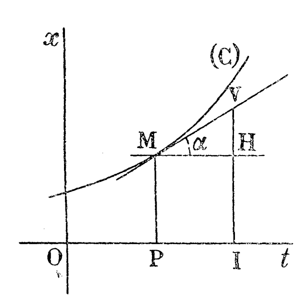
D'après cela, si ω est la vitesse angulaire dans un mouvement de rotation uniforme, l'arc x, parcouru pendant le temps t, par un point du corps situé à la distance r de l'axe, est donné par la formule

$$x = \omega r t.$$

239. **Tracé géométrique représentant la loi d'un mouvement; courbes des espaces et des vitesses.** — Supposons que la formule des espaces dans un mouvement quelconque, rectiligne par exemple, soit

(1) $$x = f(t).$$

Traçons dans un plan deux axes rectangulaires Ot, Ox, fixons sur chacun d'eux un sens positif et un sens négatif, et,



après avoir choisi deux longueurs arbitraires pour représenter l'unité de temps et l'unité de longueur, portons sur Ot des longueurs proportionnelles aux temps, et sur Ox des longueurs proportionnelles aux espaces parcourus. En d'autres termes, considérons dans la formule (1) t comme l'abscisse et x comme l'ordonnée d'un point rapporté aux deux axes rectangulaires Ot et Ox ; alors cette équation

représente une courbe (C) qui, une fois tracée, permet de déterminer toutes les circonstances du mouvement : on l'appelle *courbe des espaces*, parce que son ordonnée, mesurée à l'échelle des longueurs, fait connaître, à chaque instant, l'espace parcouru par le mobile sur sa trajectoire. Rien ne s'oppose du reste à ce que l'on prenne la même longueur pour représenter l'unité de temps et l'unité de longueur, et c'est ce que nous ferons à l'avenir.

Quelle que soit d'ailleurs la convention faite à l'égard du choix de ces unités, on voit que si le mouvement est uniforme l'équation (1) est de la forme

$$x = x_0 + vt,$$

et la courbe des espaces est une ligne droite ; si la formule des espaces est

$$x = a + bt + ct^2,$$

la courbe des espaces est une parabole, et ainsi de suite.

On voit enfin, d'après cela, ce qu'il faut entendre par *courbe des vitesses*, et comment on pourrait construire cette courbe.

Quand la courbe des espaces est tracée, il est facile d'avoir la vitesse à un instant quelconque t. Soient en effet M et M' les points de la courbe des espaces qui correspondent aux abscisses t et $t + \Delta t$, x et $x + \Delta x$ les ordonnées PM et P'M' de ces deux points. On a vu que la vitesse à l'instant t est la limite du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro ; or, on a vu en géométrie analytique que la limite de ce rapport, quand Δt tend vers zéro, est égale au coefficient angulaire de la tangente en M à la courbe (C) ; par conséquent, si α désigne l'un quelconque des angles que Ot fait avec cette tangente, et si l'on appelle v la vitesse à l'instant t, on a

$$v = \text{tg}\ \alpha.$$

On peut alors, au moyen de la courbe des espaces, construire la courbe des vitesses. Prenons en effet $PI = + 1$ et menons la parallèle IHV à Ox ; dans le triangle rectangle HMV on a

$$HV = MH\ \text{tg}\ \alpha,$$

et, comme $MH = PI = 1$, on a $HV = v$.

Ainsi, HV mesurée à l'échelle des longueurs représente la vitesse à l'instant t, ce qui permet par suite de construire la courbe des vitesses.

Inversement, la courbe des vitesses étant tracée, on peut en déduire une interprétation géométrique de la solution du problème suivant :

240. **Passer de la loi des vitesses à la loi des espaces.** — On ne peut guère songer à donner une solution complète de ce problème dans un ouvrage élémentaire : aussi nous nous bornerons à quelques indications succinctes.

Proposons-nous donc, étant donnée la formule des vitesses,

$$(1) \qquad v = \varphi(t),$$

de calculer l'espace parcouru de l'instant t_0 à l'instant t ; autrement dit, cherchons la différence entre les abscisses x_0 et x du mobile aux deux instants considérés. Supposons, pour cela, qu'entre les deux instants la vitesse varie toujours dans le même sens, qu'elle aille, par exemple, constamment en croissant. Partageons l'intervalle $t - t_0$ en n parties très petites, θ, et soient $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ les abscisses qui correspondent à cette subdivision, ce qui revient à dire que nous posons $t_1 = t_0 + \theta$; $t_2 = t_1 + \theta$, etc. ; appelons enfin v_0, $v_1, \ldots, v_{n-1}, v$ les valeurs respectives de la vitesse aux instants $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t$, calculées au moyen de la formule (1). Si l'on suppose θ assez petit, on pourra considérer le mouvement du mobile comme un mouvement uniforme dans chaque intervalle θ et l'on pourra faire deux hypothèses :

Ou bien on pourra supposer que le mobile a la vitesse v_0 de l'instant t_0 à l'instant t_1, la vitesse v_1 de t_1 à t_2, et ainsi de suite ; ou bien on pourra supposer qu'il a la vitesse v_1 dans le premier intervalle, la vitesse v_2 dans le second, etc. Les espaces successifs parcourus dans la première hypothèse sont

$$v_0(t_1 - t_0), \qquad v_1(t_2 - t_1), \qquad \ldots, \qquad v_{n-1}(t - t_{n-1}),$$

et l'espace total $x - x_0$ parcouru réellement est supérieur à la somme de ces espaces partiels ; on a donc

$$x - x_0 > v_0(t_1 - t_0) + v_1(t_2 - t_1) + \cdots + v_{n-1}(t - t_{n-1}).$$

En adoptant la seconde hypothèse, on voit de même que l'on a

$$x - x_0 < v_1(t_1 - t_0) + v_2(t_2 - t_1) + \cdots + v_n(t - t_{n-1}).$$

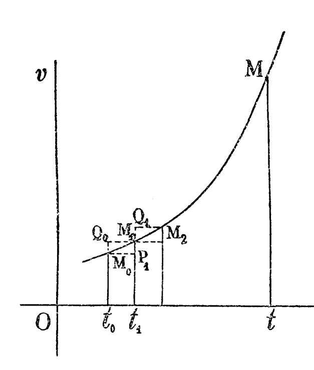
Lorsque n croît indéfiniment, θ tend vers zéro, et les seconds membres de ces inégalités ont ordinairement une limite commune qui dépend de t et que nous désignerons par $f(t)$; il en résulte que la loi du mouvement est donnée par la formule

$$x - x_0 = f(t)$$

ou

$$x = x_0 + f(t).$$

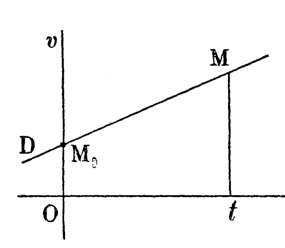
Supposons que la courbe des vitesses ait été tracée, et soient M_0t_0 et Mt les ordonnées qui correspondent aux abscisses t_0 et t; menons les ordonnées M_1t_1, M_2t_2, ... relatives aux instants t_1, t_2, ..., puis au moyen de chacune d'elles, construisons les rectangles analogues à $M_0t_0t_1P_1$ et à $Q_0t_0t_1M_1$. Appelons rectangles inscrits dans la courbe des espaces les rectangles analogues à $M_0t_0t_1P_1$, rectangles circonscrits les autres. Le premier rectangle inscrit a pour mesure $v_0(t_1 - t_0)$, et le premier rectangle circonscrit $v_1(t_1 - t_0)$;



le second rectangle inscrit a de même pour mesure $v_1(t_2 - t_1)$, et le second rectangle circonscrit $v_2(t_2 - t_1)$, et ainsi de suite. Il en résulte que l'espace $x - x_0$, parcouru par le mobile pendant le temps $t - t_0$, est compris entre la somme des rectangles inscrits et la somme des rectangles circonscrits. Or, on démontre que si n augmente indéfiniment, ces deux sommes ont une limite commune égale à l'aire du trapèze curviligne M_0t_0tM : l'espace parcouru est donc représenté par l'aire de ce trapèze.

Par exemple, si la formule des vitesses est

$$v = at + b,$$



la courbe des vitesses est une droite D, dont le coefficient angulaire est a et dont l'ordonnée à l'origine est b. L'espace parcouru du temps zéro au temps t, c'est-à-dire pendant le temps t, est représenté par l'aire du trapèze M_0OtM.

Mais on a

$$OM_0 = b, \qquad tM = at + b, \qquad Ot = t;$$

donc on aura, pour l'espace parcouru,

$$x - x_0 = \frac{at + 2b}{2} t,$$

c'est-à-dire $$x = x_0 + bt + \frac{1}{2} at^2.$$

CHAPITRE II

MOUVEMENT RECTILIGNE ET UNIFORMÉMENT VARIÉ

241. Définitions. — On dit qu'un mouvement est *uniformément varié* quand la vitesse varie de quantités égales en des temps égaux, et l'on appelle *accélération* d'un mouvement de cette nature, la quantité constante positive ou négative dont varie la vitesse quand on passe du temps t au temps $t+1$. Suivant que l'accélération est positive ou négative, le mouvement est uniformément *accéléré* ou uniformément *retardé*.

242. Formule de la vitesse dans le mouvement uniformément varié. — Soient γ l'accélération, v_0 la vitesse au temps zéro ou *vitesse initiale* et v la vitesse au temps t. Si l'on rapproche la définition du mouvement uniformément varié de celle du mouvement uniforme, on voit que l'accélération joue, dans le mouvement uniformément varié, le rôle de la vitesse dans le mouvement uniforme. Il suit de là que si la formule des espaces dans le mouvement uniforme est

$$x = x_0 + vt,$$

celle des vitesses dans le mouvement uniformément varié sera

$$v = v_0 + \gamma t.$$

On en déduit

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t},$$

ce qui montre que *l'accélération d'un mouvement uniformément varié est égale au quotient de la variation de la vitesse par la variation correspondante du temps.*

243. Accélération dans un mouvement rectiligne quelconque. — La comparaison d'un mouvement varié à un mouvement uniforme nous a conduit à la notion de la vitesse dans un mouvement quelconque; pareillement la comparaison d'un mouvement rectiligne quelconque à un mouvement rectiligne

et uniformément varié, va nous permettre d'étendre la notion d'accélération aux mouvements rectilignes quelconques.

Appelons, pour cela, v et $v + \Delta v$ les vitesses respectives d'un mobile aux instants t et $t + \Delta t$. Pour avoir une idée approchée du mouvement de ce mobile, il est naturel de le comparer à celui d'un autre mobile animé d'un mouvement uniformément varié sur la même trajectoire, et de manière que ses vitesses respectives aux instants t et $t + \Delta t$ soient précisément égales à v et à $v + \Delta v$; l'accélération de ce mobile, en vertu du numéro précédent, serait $\frac{\Delta v}{\Delta t}$: on l'appelle l'*accélération moyenne* du premier mobile pendant le temps Δt.

Par analogie avec ce qui a été fait dans la définition de la vitesse, on est conduit à appeler *accélération à l'instant t* dans un mouvement rectiligne quelconque, la limite du rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ lorsque Δt tend vers zéro, c'est-à-dire la limite de l'accélération moyenne, pendant l'intervalle de temps Δt, quand cet intervalle de temps tend vers zéro. Le rapprochement de cette définition avec celle de la dérivée montre que *l'accélération à l'instant t est égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps.* Comme d'autre part la vitesse est égale à la dérivée de l'espace, il en résulte que *l'accélération est égale à la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps.*

Si donc
$$x = f(t)$$
est la formule des espaces, celle des vitesses est
$$v = f'(t),$$
et celle des accélérations,
$$\gamma = f''(t).$$

Si la formule des vitesses est
$$v = \varphi(t),$$
celle des accélérations est
$$\gamma = \varphi'(t).$$

En particulier, si l'espace x est lié au temps t par la relation

(1) $$x = a + bt + ct^2,$$

du second degré par rapport au temps, on a

$$v = b + 2ct,$$
$$\gamma = 2c,$$

et le mouvement est uniformément varié.

Nous allons montrer que, réciproquement, dans tout mouvement uniformément varié, l'espace est lié au temps par une relation de la forme (1).

244. Loi des espaces dans le mouvement uniformément varié. — Soit en effet $x'x$ la trajectoire sur laquelle nous prendrons comme sens positif le sens de la vitesse initiale v_0, de sorte que v_0 sera une quantité positive. Proposons-nous de trouver l'espace parcouru pendant le temps t. Pour cela, nous examinerons deux cas, suivant que la vitesse ne s'annule pas ou s'annule lorsque le temps varie de zéro à $t (t > 0)$. Examinons d'abord le premier cas ; il se subdivise en deux autres, suivant que le mouvement est uniformément accéléré ou uniformément retardé.

Supposons en premier lieu que le mouvement soit uniformément accéléré, c'est-à-dire que son accélération γ soit positive. Partageons le temps t en n parties égales à θ ; posons, pour un instant,

$$t_\alpha = \alpha\theta,$$

et appelons $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v$ les vitesses respectives du mobile aux instants zéro, $t_1, \ldots, t_{n-1}, t$. Soient enfin x_0 et x ses abscisses aux instants zéro et t. En reprenant textuellement le raisonnement du numéro 240, on a

$$v_0\theta + v_1\theta + \cdots + v_{n-1}\theta < x - x_0 < v_1\theta + v_2\theta + \cdots + v\theta.$$

Or, on a d'une manière générale

$$v = v_0 + \gamma t ;$$

par suite
$$v_\alpha = v_0 + \alpha\gamma\theta ;$$

donc les inégalités précédentes peuvent s'écrire successivement

$$(1) \qquad \theta[v_0 + v_0 + \gamma\theta + \cdots + v_0 + (n-1)\gamma\theta]$$
$$< x - x_0 < \theta[v_0 + \gamma\theta + v_0 + 2\gamma\theta + \cdots + v_0 + n\gamma\theta],$$
$$nv_0\theta + \gamma\theta^2(1+2+\cdots+n-1) < x - x_0 < nv_0\theta + \gamma\theta^2(1+2+\cdots+n),$$
$$nv_0\theta + \frac{n(n-1)}{2}\gamma\theta^2 < x - x_0 < nv_0\theta + \frac{n(n+1)}{2}\gamma\theta^2.$$

Mais si l'on remplace θ par $\frac{t}{n}$, elles deviennent

$$v_0 t + \frac{n-1}{n} \frac{\gamma t^2}{2} < x - x_0 < v_0 t + \frac{n+1}{n} \frac{\gamma t^2}{2},$$

et, d'autre part, si n croît indéfiniment, les termes extrêmes ont la même limite,

$$v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2.$$

On a donc $$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$$

ou

(2) $$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2.$$

Supposons en second lieu que le mouvement soit uniformément retardé ; la formule des vitesses est alors

$$v = v_0 - \gamma t,$$

γ désignant la valeur absolue de l'accélération, et le raisonnement, puisque la vitesse ne s'annule pas de zéro à t, reste le même que plus haut ; seulement au lieu des inégalités (1) on a les suivantes :

$$\theta[v_0 + v_0 - \gamma\theta + \cdots + v_0 - \gamma(n-1)\theta] > x - x_0$$
$$> \theta[v_0 - \gamma\theta + v_0 - 2\gamma\theta + \cdots + v_0 - \gamma n\theta],$$

que l'on met facilement sous la forme

$$n v_0 \theta - \frac{n(n-1)}{2} \gamma\theta^2 > x - x_0 > n v_0 \theta - \frac{n(n+1)}{2} \gamma\theta^2.$$

On en conclut $$x - x_0 = v_0 t - \frac{1}{2} \gamma t^2$$

ou

(3) $$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} \gamma t^2,$$

formule qui ne diffère de la précédente que par le changement de signe de γ.

Il reste à examiner le cas où la vitesse s'annule lorsque le temps varie de zéro à t. Dans ce cas v_0 étant par hypothèse positive, l'accélération est négative et la formule des vitesses est

$$v = v_0 - \gamma t ;$$

il en résulte que la vitesse s'annule lorsque la valeur t_1 du temps est égale à $\frac{v_0}{\gamma}$. Soit t' le nombre d'unités de temps écoulées de l'instant t_1 à l'instant t ; on a évidemment

$$t_1 + t' = t,$$

et le mouvement comprend deux phases. Pendant la première phase, de durée t_1, le mobile va de sa position initiale A_0 à une position A dont l'abscisse x_1, obtenue au moyen de la formule (3), est

x' O A₀ M A x

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2}\gamma t_1^2. \tag{4}$$

Pendant la seconde phase, de durée t', la vitesse change de signe, le mobile revient sur ses pas, va de A en M, et l'on a

$$AM = \frac{1}{2}\gamma t'^2 ;$$

de sorte que l'abscisse du mobile au temps t est définie, en grandeur et signe, par la formule

$$x = x_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2}\gamma t_1^2 - \frac{1}{2}\gamma t'^2.$$

Si l'on remplace, dans cette formule, t_1 par $\frac{v_0}{\gamma}$ et t' par $t - \frac{v_0}{\gamma}$, elle devient successivement

$$x = x_0 + \frac{v_0^2}{\gamma} - \frac{1}{2}\gamma\frac{v_0^2}{\gamma^2} - \frac{1}{2}\gamma\left(t - \frac{v_0}{\gamma}\right)^2$$

et

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

On retrouve ainsi la formule (3), qui est d'ailleurs elle-même comprise dans la formule (2) si l'on regarde, dans cette dernière, γ comme négative. Ainsi, dans les deux cas, la formule des espaces est

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

On s'assure du reste sans difficulté que cette formule, établie en supposant v_0 et t positifs, est générale, de sorte que dans tous les cas, la formule des espaces dans le mouvement

uniformément varié est bien de la forme

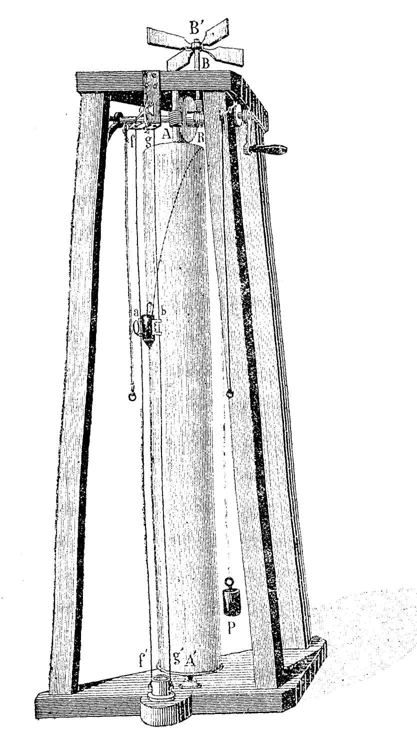
$$x = a + bt + ct^2.$$

245. **Loi de la chute des corps dans le vide.** — Un exemple de mouvement uniformément varié nous est fourni par la chute des corps dans le vide. On prouve en effet qu'un corps abandonné à lui-même, à une certaine hauteur au-dessus du sol et dans le vide, se déplace suivant la verticale du point de départ, d'un mouvement uniformément accéléré. L'accélération du mouvement, qui est la même pour tous les corps, est égale à $9^m,8096$ à Paris ; on la représente par la lettre g. Divers appareils ont été imaginés pour vérifier la loi de la chute des corps. Les plus usités sont la machine d'Atwood et l'appareil du général Morin. Nous allons donner la description de celui-ci.

246. **Appareil Morin.** — L'appareil du général Morin se compose essentiellement d'un cylindre vertical en bois, mobile autour d'un axe également vertical, et couvert d'une feuille de papier. Le mouvement est produit par la chute d'un poids P, attaché à l'extrémité d'une corde qui s'enroule sur l'arbre d'un treuil. L'axe du treuil est fixé sur une roue dentée R, dont les dents, inclinées à 45°, s'engrènent d'un côté avec l'axe AA′ du cylindre, de l'autre avec l'axe BB′ d'un volant à ailettes. Sous l'action du poids P, le cylindre prend un mouvement uniformément accéléré ; mais, par suite de la résistance opposée par l'air au mouvement des ailettes, résistance qui croît avec la vitesse de rotation, le mouvement tend à devenir uniforme, ce qui arrive, généralement, quand le poids P est à peu près aux deux tiers de sa course. On s'en assure du reste par les chocs que produisent les ailettes sur une petite lame de baleine fixée à la partie supérieure du bâti qui supporte l'appareil.

Quand le mouvement est uniforme, on laisse tomber un poids cylindro-conique, Q, en fonte, primitivement retenu par un crochet et dont la surface est munie d'un

crayon perpendiculaire à la surface du cylindre en bois sur laquelle il trace une ligne : c'est de la nature de la transformée de cette ligne quand on développe sur un plan la feuille de papier qui recouvre la surface latérale du cylindre, que l'on déduit la loi de la chute des corps. Avant de dire comment, nous allons terminer rapidement la description de l'appareil et indiquer quelques détails de l'expérience.

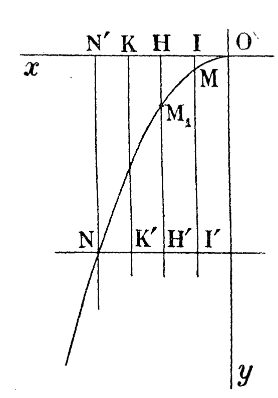


Pendant la chute du poids Q, le frottement du crayon sur la surface du cylindre tend à dévier ce poids de la verticale. Pour éviter cette déviation, le poids Q porte deux appendices *a* et *b* percés de trous dans lesquels s'engagent deux fils *ff'* et *gg'* qui servent de guides. D'ailleurs le crayon presse toujours légèrement sur la surface du cylindre tournant, sous l'action d'un petit ressort placé dans le même tube métallique que ce crayon, et un dispositif spécial permet de ne laisser sortir celui-ci qu'au moment où le déclic se produit et où le poids Q commence à tomber : de cette façon on évite l'usure inutile du crayon.

L'expérience se fait dans l'air ambiant, dont on peut négliger la résistance à cause de la grande densité du poids Q par rapport à son volume, et à cause aussi de la faible durée de la chute (une fraction de seconde). Ajoutons enfin qu'à l'aide, soit

du poids P, soit de l'inclinaison des ailettes, on règle le mouvement de rotation du cylindre de manière que celui-ci ne fasse qu'un tour pendant la durée de la chute.

247. **Vérification de la loi de la chute des corps au moyen de l'appareil Morin.** — Cela posé, soit OMN la transformée sur le plan de la ligne tracée par le crayon sur la surface du cylindre tournant ; soit Oy la génératrice du cylindre qui passe par le point O, d'où part le crayon, et Ox le développement du parallèle du cylindre qui passe par le même point. Traçons plusieurs parallèles équidistantes II′, HH′, KK′, NN′, etc., et soient M, M_1, M_2, ... leurs points de rencontre respectifs avec la ligne. A l'instant où la pointe du crayon s'est trouvée en M, la génératrice II′ était venue prendre, dans l'espace, la place de la génératrice Oy ; par suite, puisque le mouvement de rotation est uniforme, il est permis de supposer que l'abscisse OI du point I mesure le temps écoulé à partir du commencement de la chute, et que l'ordonnée IM mesure l'espace parcouru par le poids Q. En d'autres termes, l'ordonnée d'un point quelconque de la ligne OMN, rapportée aux axes Ox et Oy, représente l'espace parcouru par le point Q pendant un intervalle de temps mesuré par l'abscisse de ce poids ; ou encore, si l'on veut, la courbe OMN est la courbe des espaces rapportée aux axes Ox et Oy, Ox étant l'axe des temps. Or, si l'on mesure les ordonnées des points M, M_1, M_2, ..., dont les abscisses sont OI, 2OI, 3OI, etc., on trouve $HM_1 = 4IM$, $KM_2 = 3^2 \times IM, \dots$; d'où il suit que les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps. Il en résulte aussi que la courbe des espaces est une parabole dont Ox est la tangente au sommet.



En réalité, on n'obtient ainsi qu'une vérification approximative de la loi ; car le point O n'est pas exactement confondu

avec le sommet de la parabole. Pour faire une vérification plus rigoureuse, on détermine graphiquement le sommet en déterminant le foyer au moyen de deux tangentes et des rayons vecteurs allant des points de contact au foyer : ces rayons vecteurs sont faciles à construire à l'aide de la propriété de la tangente, car on connaît la direction de l'axe. Ayant le foyer, on en déduit l'axe, et, par suite, le sommet.

Au lieu de vérifier la loi des espaces, on peut vérifier la loi des vitesses. Pour cela on mesure les angles que les tangentes aux divers points de la courbe font avec l'axe des x ; on constate alors que les tangentes trigonométriques de ces angles sont proportionnelles aux temps.

CHAPITRE III

COMPOSITION DES MOUVEMENTS

248. **Mouvements relatifs.** — Nous avons appelé *système invariable* un système de points dont les distances mutuelles restent constantes. Appelons S un système invariable en mouvement et soit M un point mobile dans le système. Le mouvement du point M peut être regardé, soit par un observateur fixe dans l'espace, soit par un observateur entraîné avec le système ; le mouvement du point M, regardé par le premier observateur, s'appelle un *mouvement absolu,* et l'on appelle *mouvement relatif* du point M celui qui est regardé par le second observateur ; enfin on appelle *mouvement d'entraînement* le mouvement du système S regardé par un observateur fixe dans l'espace.

Tous les mouvements observés à la surface de la Terre sont des mouvements relatifs, car la Terre est en mouvement dans l'espace. Nous n'avons donc pas, dans la nature, d'exemples de mouvements absolus, mais nous n'en concevons pas moins leur existence.

Lorsque l'observateur entraîné avec le système S n'a pas conscience de son mouvement, s'il regarde un observateur fixe dans l'espace tout se passe pour lui comme si ce dernier observateur seul était mobile. Ce mouvement fictif regardé par l'observateur entraîné avec le système mobile s'appelle un *mouvement apparent.* C'est ainsi qu'un observateur placé à la surface de la Terre voit tous les astres effectuer une révolution complète autour de la Terre dans l'espace de 24 heures sidérales, alors que c'est la Terre qui effectue une rotation sur elle-même dans le même temps. C'est ainsi également qu'un observateur placé sur le pont d'un navire qui s'éloigne du rivage, croit tout d'abord que c'est le rivage qui s'éloigne du navire ; ce n'est que la réflexion et la conscience de son mou-

vement propre qui parviennent, au bout de quelque temps, à détruire cette illusion.

Nous n'avons parlé, jusqu'ici, que d'un seul mouvement relatif; mais on peut concevoir, plus généralement, qu'un point M soit mobile dans un premier système S_1, mobile lui-même dans un second système $S_2, \ldots,$ le dernier système S_n étant mobile dans l'espace. Si l'on imagine alors plusieurs observateurs entraînés respectivement avec les systèmes $S_1, S_2, \ldots, S_n$, les mouvements du point M, observés par chacun d'eux, sont des mouvements relatifs, et le mouvement absolu du point M est celui qui est regardé par un observateur fixe dans l'espace.

249. Remarque. — La position, dans l'espace, d'un système invariable S est parfaitement définie quand on connaît les positions occupées par trois points du système non situés en ligne droite.

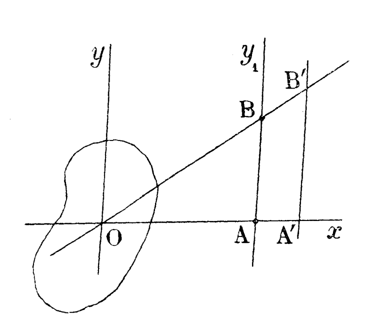
Appelons en effet S_1 une position du système et A_1, B_1, C_1 les positions respectives correspondantes de trois de ces points A, B, C non situés en ligne droite. Si on déplace le système S de manière que A vienne en A_1 et B en B_1, et si on fixe alors ces points, les seuls mouvements que puisse prendre le système sont des mouvements de rotation autour de l'axe A_1B_1; de sorte que si on assujettit un point C du système à coïncider avec le point C_1, la position du système tout entier en résulte, pourvu bien entendu que le point C_1 ne soit pas en ligne droite avec les points A_1 et B_1. Il est clair d'ailleurs que pour amener A, B, C à coïncider respectivement avec A_1, B_1, C_1, il est nécessaire et suffisant que l'on ait $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $A_1C_1 = AC$.

250. **Composition des mouvements.** — Le problème de la composition des mouvements peut s'énoncer ainsi :

Connaissant le mouvement d'un point M *dans un premier système* S_1, *celui de* S_1 *dans un second système* S_2, *et ainsi de suite jusqu'à un système* S_n *dont le mouvement dans l'espace est supposé connu, trouver le mouvement absolu ; plus généralement, connaissant tous ces mouvements, sauf un, trouver celui-ci.*

Nous allons montrer comment on peut résoudre ce problème dans quelques cas simples.

231. Composition de deux mouvements rectilignes et uniformes. — Considérons un système S animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme de vitesse v suivant la droite ou, plutôt, parallèlement à la droite Ox. Supposons qu'un point mobile, occupant primitivement la position O, prenne, si le système S était fixe, un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v' suivant la droite Oy. Admettons de plus, ce qui est conforme à l'observation, que le mouvement d'entraînement n'ait pas d'action sur le mouvement relatif, et proposons-nous de trouver le mouvement absolu ou *mouvement résultant*.



Pour cela, comptons les temps à partir de l'instant où le mobile occupe la position O dans l'espace. Au bout du temps t, tous les points du système S ont parcouru dans la direction Ox des chemins égaux à vt ; en particulier le point O du système a parcouru sur Ox un chemin $OA = vt$, et la droite du système qui était confondue avec Oy, c'est-à-dire la trajectoire relative du point est venue en Ay_1 parallèlement à Oy. Mais pendant ce temps le mobile s'est déplacé sur sa trajectoire relative et a parcouru le même chemin $v't$ que si cette trajectoire était au repos ; il se trouve donc au bout du temps t en un point B de Ay_1 tel que $AB = v't$. Le lieu géométrique des points B, lorsque t varie, sera la trajectoire absolue du mobile, c'est-à-dire la trajectoire résultante. Or, si l'on prend comme axes de coordonnées Ox et Oy, les coordonnées du point B à un instant quelconque t sont, d'après ce que nous venons de voir,

$$(1) \qquad \begin{cases} x = vt, \\ y = v't. \end{cases}$$

Entre ces coordonnées on a la relation

$$(2) \qquad \frac{y}{x} = \frac{v}{v'},$$

que l'on obtient en divisant membre à membre les équations (1) et qui montre que le lieu géométrique des points B est une ligne droite passant par l'origine et ayant pour coefficient angulaire le rapport des vitesses. *Ainsi, le mouvement résultant est un mouvement rectiligne.* Nous allons montrer qu'il est uniforme. Pour cela, appelons B' une autre position du mobile, à l'instant t' par exemple, et soient x' et y' ses coordonnées à cet instant. On a

$$(3) \qquad \begin{cases} x' = vt', \\ y' = v't', \end{cases}$$

et la comparaison avec les coordonnées x et y du point B donne

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{t}{t'},$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{t}{t'}.$$

Mais la similitude des deux triangles OAB, OA'B' donne

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB'}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}}\ ;$$

par suite,

$$(5) \qquad \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB'}} = \frac{t}{t'},$$

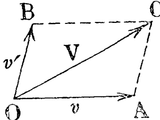
ce qui montre que l'espace parcouru est proportionnel au temps employé à le parcourir et, par conséquent, que le mouvement est uniforme.

Il nous reste à trouver la vitesse de ce mouvement. Pour cela, supposons que $t' = 1$; alors, par définition même, OA', A'B' et OB' sont respectivement égales à la vitesse d'entraînement, à la vitesse relative et à la vitesse absolue, puisque ce sont les espaces parcourus pendant l'unité de temps. Mais on peut considérer OB' comme la diagonale du parallélogramme construit sur OA' et sur A'B'; donc enfin :

Le mouvement résultant de deux mouvements rectilignes et uniformes, de vitesses v et v', est un mouvement rectiligne et uniforme dont la vitesse est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

252. **Corollaires.** — 1° *La vitesse relative v' est la somme géométrique de la vitesse absolue V et de la vitesse d'entraînement v prise en sens contraire.*

Remarquons d'ailleurs que la vitesse d'entraînement prise en sens contraire n'est autre chose que la vitesse apparente.



2° *La vitesse d'entraînement est la somme géométrique de la vitesse absolue et de la vitesse relative prise en sens contraire.*

3° *Entre les trois vecteurs v, v' et V on a les mêmes relations qu'entre deux forces et leur résultante.*

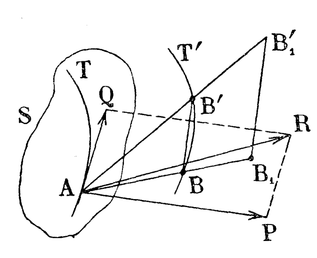
Ces diverses propositions résultent immédiatement de l'examen de la figure ci-contre.

253. **Composition d'un nombre quelconque de mouvements rectilignes et uniformes.** — La règle de composition de deux mouvements rectilignes et uniformes s'étend à un nombre quelconque de mouvements de cette espèce. En d'autres termes, *le mouvement résultant d'un nombre quelconque de mouvements rectilignes et uniformes, est un mouvement rectiligne et uniforme, dont la vitesse s'obtient en faisant la somme géométrique des vitesses des mouvements composants.*

Cette proposition se démontre de proche en proche. Quand on a deux mouvements composants, la règle conduit au *parallélogramme des vitesses*; elle conduit au *parallélépipède des vitesses,* quand on en a trois.

Enfin, quand tous les mouvements ont la même direction, la somme géométrique coïncide avec la somme ordinaire ; de sorte que si l'on a fixé un sens positif et un sens négatif sur cette direction, *la vitesse résultante sera la somme algébrique des vitesses composantes.*

234. **Composition des vitesses quand les mouvements sont quelconques.** — La règle de composition des vitesses de plusieurs mouvements rectilignes et uniformes, donnée plus haut, peut être étendue facilement à des mouvements quelconques. Bornons-nous, par exemple, au cas de deux mouvements : un mouvement d'entraînement du système S et un mouvement relatif d'un point M dans ce système. Soit A la position du mobile pour une position initiale du système S à l'instant t, et soit T la trajectoire relative du point dans le système. A l'instant $t + \Delta t$ le point A du système est venu en B, et la trajectoire T s'est transportée parallèlement à elle-même en T′; mais pendant ce temps, le point M s'est déplacé sur sa trajectoire relative et est venu en un point B′, de sorte que sa vitesse absolue à l'instant t est, par définition même, une longueur égale à lim. $\frac{AB'}{\Delta t}$, portée sur la position limite de AB′ quand Δt tend vers zéro. Appelons *vitesse d'entraînement* du point M à l'instant t la vitesse, à cet instant, du point A du système S avec lequel il coïncide à ce même instant ; par définition, cette vitesse sera la limite de $\frac{AB}{\Delta t}$ quand le point B se rapprochera indéfiniment du point A, et elle sera portée sur la position limite de AB. Enfin la limite de $\frac{BB'}{\Delta t}$, portée sur la position limite de BB′, sera la vitesse relative du point M à l'instant t.



Cela posé, portons $AB_1 = \frac{AB}{\Delta t}$ et construisons les deux triangles semblables ABB′ et $AB_1B'_1$; par raison de similitude, on a

$$B_1B'_1 = \frac{BB'}{\Delta t} \qquad \text{et} \qquad AB'_1 = \frac{AB'}{\Delta t},$$

de sorte que si Δt tend vers zéro, le triangle $AB_1B'_1$ a pour

limite un triangle APR dont les longueurs des côtés sont respectivement

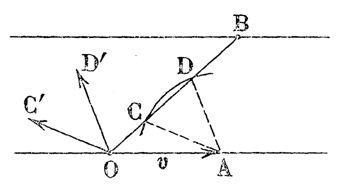
$$AP = \lim. \frac{AB}{\Delta t}, \qquad PR = \lim. \frac{BB'}{\Delta t}, \qquad AR = \lim. \frac{AB'}{\Delta t}.$$

Mais les directions AP, PR et AR sont les limites respectives de AB, BB' et AB', c'est-à-dire de la vitesse d'entraînement, de la vitesse relative et de la vitesse absolue du point M. Donc AP, PR et AR sont respectivement égales à ces vitesses en grandeur et sens. Or, AR est la somme géométrique de AP et de PR ; donc enfin *la vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement* ou, si l'on veut, *la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vitesses.*

On étend ensuite facilement cette règle, de proche en proche, à un nombre quelconque de vitesses.

255. Remarque. — *Décomposition des vitesses.* — La décomposition des vitesses suit évidemment les mêmes règles que la décomposition des forces.

256. **Application I.** — *Un courant a une vitesse v donnée en grandeur et direction; quelle direction faut-il donner à un bateau dont la vitesse v' est donnée en grandeur pour atteindre un point donné de la rive opposée?*

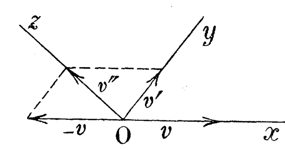


Soit O le point de départ et soient OA la vitesse du courant et B le point à atteindre. La question se ramène à la construction d'un triangle dont on connaît deux côtés v, v' et l'angle AOB opposé au côté v'. On décrira donc une circonférence de centre A et de rayon v' et l'on prendra les points C et D où cette circonférence rencontre OB. Les directions cherchées seront alors OC' parallèle à AC et OD' parallèle à AD.

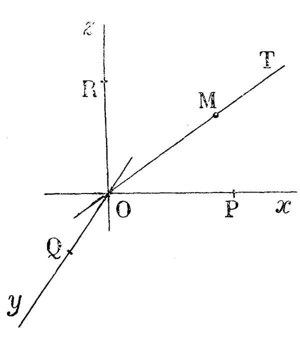
257. **Application II.** — *Deux locomotives s'éloignent l'une de l'autre dans des directions données Ox et Oy, avec des vitesses*

respectives v et v'. Par rapport à la première, la deuxième semble prendre un mouvement apparent dans une direction Oz et avec une vitesse v''; trouver cette direction et cette vitesse.

La vitesse apparente du sol par rapport à la première locomotive est égale et de sens contraire à v. Par rapport à un observateur placé sur cette locomotive, tout se passe donc comme si l'autre locomotive participait à deux mouvements de vitesses respectives v' et $-v$. La diagonale du parallélogramme construit sur v' et sur $-v$ définit alors Oz et v''.



258. Projection du mouvement sur trois axes rectangulaires fixes. — Soit OT la trajectoire d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse V. Rapportons le mobile à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et soit O la position du mobile au temps zéro. Au bout d'un temps quelconque t, le mobile occupe sur sa trajectoire une position M définie par $OM = Vt$, et si l'on appelle P, Q, R ses projections sur les trois axes à cet instant, ses coordonnées $x = OP$, $y = OQ$, $z = OR$ au même instant, sont égales aux projections respectives de OM sur les trois axes. Or, si l'on appelle α, β, γ les cosinus directeurs de OT, on a



$$OP = OM.\alpha,$$
$$OQ = OM.\beta,$$
$$OR = OM.\gamma.$$

Par conséquent, puisque $OM = Vt$, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} x = Vt.\alpha, \\ y = Vt.\beta, \\ z = Vt.\gamma. \end{cases}$$

L'une quelconque de ces équations est la formule des espaces dans un mouvement uniforme. La première, par exemple, définit un mouvement uniforme sur l'axe des x avec la vitesse $V\alpha$; de même la deuxième et la troisième définissent des mouvements uniformes sur Oy et sur Oz avec les vitesses respectives $V\beta$ et $V\gamma$. Connaissant ces trois mouvements, on connaît par cela même le mouvement du mobile dans l'espace, mouvement dont la vitesse a pour projections respectives $V\alpha$, $V\beta$, $V\gamma$ et est, par suite, la somme géométrique de ces trois vitesses. Ces trois vitesses $V\alpha$, $V\beta$, $V\gamma$ s'appellent les composantes de la vitesse V suivant les axes Ox, Oy, Oz, et si on les désigne par X, Y, Z, on a

$$(2) \qquad x = Xt, \qquad y = Yt, \qquad z = Zt.$$

Supposons, plus généralement, qu'un mobile soit animé d'un mouvement rectiligne et uniforme résultant de plusieurs autres mouvements également rectilignes et uniformes, et proposons-nous de déterminer ses coordonnées x, y, z à un instant quelconque t, par rapport aux trois axes Ox, Oy, Oz. Supposons toujours que O soit la position initiale du mobile et appelons $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les vitesses composantes, V la vitesse résultante. Puisque V est la somme géométrique de $V_1, V_2, \ldots, V_n$, en projetant sur un axe quelconque on a

$$\text{proj. } V = \text{proj. } V_1 + \text{proj. } V_2 + \cdots + \text{proj. } V_n.$$

Appelons alors X, Y, Z les composantes de V suivant les axes, X_i, Y_i, Z_i celles de V_i, et projetons successivement suivant Ox, Oy et Oz; nous aurons

$$X = \Sigma X_i,$$
$$Y = \Sigma Y_i,$$
$$Z = \Sigma Z_i;$$

par conséquent

$$V^2 = (\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2,$$

et, en vertu des formules (2),

$$x = t . \Sigma X_i,$$
$$y = t . \Sigma Y_i,$$
$$z = t . \Sigma Z_i.$$

Quant aux cosinus directeurs α, β, γ de la vitesse résultante, on les obtient facilement quand celle-ci est déterminée. On a en effet

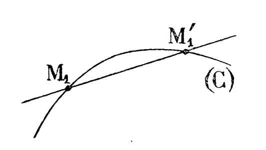
$$X = V\alpha, \qquad Y = V\beta, \qquad Z = V\gamma$$

et, par suite,

$$\alpha = \frac{X}{V}, \qquad \beta = \frac{Y}{V}, \qquad \gamma = \frac{Z}{V}.$$

259. **Théorème.** — *Lorsqu'on projette sur un plan ou sur un axe un mobile animé d'un mouvement quelconque, la vitesse du mobile projection est égale à chaque instant à la projection de la vitesse du mobile dans l'espace.*

Nous nous bornerons à donner la démonstration de cette proposition dans le cas où l'on projette sur un axe : le raisonnement est du reste le même quand on projette sur un plan.



Soit donc $x'x$ un axe de projection et soit (C) la trajectoire du mobile dans l'espace. Appelons M_1 et M_1' deux positions du mobile sur sa trajectoire aux instants t et $t + \Delta t$, et soient m_1 et m_1' leurs projections respectives sur l'axe, *le système de projection étant d'ailleurs quelconque, orthogonal ou oblique.* Désignons par M le mobile dans l'espace, par m le mobile qui en est la projection sur $x'x$, dans le système de projections considéré. On a évidemment

$$m_1m_1' = \text{proj. } M_1M_1'$$

et

$$\frac{m_1m_1'}{\Delta t} = \text{proj. } \frac{M_1M_1'}{\Delta t},$$

$\dfrac{M_1M_1}{\Delta t}$ désignant un vecteur porté sur la corde M_1M_1' à partir du point M_1. Or, $\dfrac{m_1m_1'}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne du mobile projection pendant le temps Δt ; $\dfrac{M_1M_1'}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne du mobile M, pendant le même temps. L'égalité précédente signifie donc que la vitesse moyenne du mobile m, projection

de M_1 est toujours égale à la projection de la vitesse moyenne du mobile M. Si donc on fait tendre Δt vers zéro, on aura

$$\lim. \frac{m_1m'_1}{\Delta t} = \lim. \text{proj.} \frac{M_1M'_1}{\Delta t},$$

ou bien

$$\lim. \frac{m_1m'_1}{\Delta t} = \text{proj.} \lim. \frac{M_1M'_1}{\Delta t}.$$

Mais si V est la vitesse du mobile M, v celle de sa projection m, on a

$$\lim. \frac{m_1m'_1}{\Delta t} = v \qquad \text{et} \qquad \lim. \frac{M_1M'_1}{\Delta t} = V.$$

En remplaçant, on aura donc

$$v = \text{proj. } V. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

260. **Application.** — Supposons que l'on ait rapporté le mouvement d'un point mobile à trois axes rectangulaires ou non, Ox, Oy, Oz. La position de ce point à un instant quelconque est complètement définie par ses coordonnées x, y, z, qui sont des fonctions du temps, connues en même temps que la loi du mouvement. Soient alors

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

les expressions de x, y, z en fonction de t. Ces expressions définissent à chaque instant les projections du mobile sur les trois axes. Or, les vitesses respectives de ces projections sont

$$f'(t), \qquad \varphi'(t), \qquad \psi'(t),$$

en vertu de la définition de la vitesse dans un mouvement rectiligne quelconque. Il suit alors du théorème précédent que la vitesse du mobile dans l'espace est la somme géométrique de ces trois vitesses portées respectivement sur les axes Ox, Oy, Oz.

Si le mouvement du point s'effectuait non dans l'espace mais dans un plan, en prenant deux axes quelconques Ox et Oy de ce plan, la position du mobile serait définie par deux équations seulement,

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

et, par suite, la vitesse à un instant quelconque serait la

somme géométrique de $f'(t)$ et de $\varphi'(t)$, portées respectivement sur Ox et sur Oy.

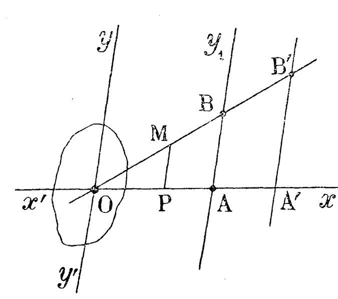
La composition de deux mouvements rectilignes et uniformes peut se déduire immédiatement de ces considérations. Si nous reprenons en effet les formules (1) du numéro 251, nous avons

$$x = vt, \qquad y = v't,$$

dont les dérivées respectives sont v et v' ; donc la vitesse du mouvement résultant est la somme géométrique de v et de v'.

Les problèmes qui suivent vont d'ailleurs nous fournir d'autres exemples.

261. **Composition de deux mouvements rectilignes et uniformément variés.** — Supposons qu'un système invariable S soit animé d'un mouvement rectiligne et uniformément varié parallèle à la droite $x'x$. Soient γ l'accélération de ce mouvement et v_0 sa vitesse initiale dirigée suivant $x'x$. Supposons, d'autre part, qu'un point mobile occupant primitivement la position O, prenne, si le système S demeurait fixe, un mouvement rectiligne et uniformément varié suivant $y'y$, d'accélération γ' et de vitesse initiale v'_0 dirigée suivant $y'y$. Admettons de plus, ce qui est conforme à l'observation, que le mouvement d'entraînement n'ait pas d'action sur le mouvement relatif, et comptons le temps à partir de l'instant où le mobile est en O.



Au bout du temps t, tous les points du système S ont parcouru des chemins égaux, parallèlement à $x'x$ et, en nous bornant au point O, ce point occupe une position A telle que l'on ait en grandeur et sens

$$OA = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

La droite $y'y$ s'est déplacée parallèlement à elle-même et est

venue coïncider avec la droite Ay_1 qui lui est parallèle. Mais pendant ce temps le mobile s'est déplacé sur sa trajectoire relative et a pris une position B telle que l'on ait en grandeur et sens

$$AB = v'_0 t + \frac{1}{2} \gamma' t^2.$$

Si donc x et y sont les coordonnées, par rapport à Ox et Oy, du mobile à l'instant t, on a

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= OA = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2, \\ y &= AB = v'_0 t + \frac{1}{2} \gamma' t^2. \end{aligned} \right.$$

Sa vitesse au même instant a pour composantes respectives suivant les axes, les dérivées de x et de y par rapport au temps, c'est-à-dire $v_0 + \gamma t$ suivant Ox et $v'_0 + \gamma' t$ suivant Oy. Mais $v_0 + \gamma t$ est la vitesse du mouvement d'entraînement et $v'_0 + \gamma' t$ est la vitesse du mouvement relatif ; donc la vitesse du mouvement résultant est à chaque instant la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

Ajoutons que les équations (1) définissent la trajectoire absolue du mobile et enfin que l'équation de cette trajectoire s'obtient en éliminant t entre les deux équations : on trouve facilement l'équation d'une parabole, dans le cas général.

La trajectoire devient une ligne droite lorsque les vitesses initiales sont nulles. Dans ce cas, en effet, les formules (1) deviennent

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \gamma t^2, \\ y &= \frac{1}{2} \gamma' t^2, \end{aligned} \right.$$

et l'équation de la trajectoire, rapportée aux axes Ox et Oy, est

$$\frac{x}{y} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

Il est aisé de prouver, dans ce cas, que le mouvement est

uniformément varié et que l'accélération du mouvement résultant est la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations composantes. Si l'on désigne en effet par B' la position du mobile au temps t', par x' et y' ses coordonnées, on a

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}\gamma t'^2, \\ y' &= \frac{1}{2}\gamma' t'^2, \end{aligned} \right.$$

et la comparaison des formules (3) et (4) donne

$$(5) \qquad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{t^2}{t'^2}.$$

Mais les triangles OAB, OA'B' étant semblables, on a

$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB'}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{x}{x'}$$

et par suite
$$\frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB'}} = \frac{t^2}{t'^2},$$

ce qui montre que les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir, c'est-à-dire que le mouvement est uniformément accéléré.

Cherchons l'accélération de ce mouvement. Remarquons d'abord, pour cela, que dans un mouvement uniformément varié et rectiligne l'accélération est le double de l'espace parcouru pendant l'unité de temps, *si toutefois la vitesse initiale est nulle*. Faisons alors $t = 1$ dans les équations (3); nous aurons ainsi les coordonnées du mobile au bout de l'unité de temps. On voit que ces coordonnées sont égales respectivement aux demi-accélérations des mouvements composants, de sorte que si M est la position du mobile au bout de l'unité de temps, en menant MP parallèle à Oy, on a

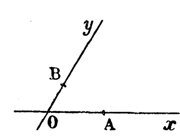
$$\mathrm{OP} = \frac{1}{2}\gamma, \qquad \mathrm{PM} = \frac{1}{2}\gamma'.$$

Mais, par définition, OM est la demi-accélération du mouvement résultant, et comme elle est la somme géométrique de

OP et de PM, il en résulte bien que *l'accélération du mouvement résultant de deux mouvements rectilignes et uniformément variés, sans vitesses initiales, est la diagonale du parallélogramme construit sur les accélérations composantes.*

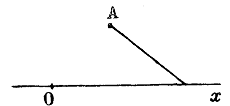
262. Remarque. — Avant d'abandonner ce sujet, remarquons que les formules (1) sont applicables quelles que soient les valeurs des quatre quantités v_0, v'_0, γ et γ'. En particulier si l'une des accélérations, γ ou γ', est nulle, elles définissent la position, à un instant quelconque, d'un mobile soumis à deux mouvements, l'un uniforme et l'autre uniformément varié. Nous verrons en dynamique des exemples de mouvements de cette espèce.

EXERCICES SUR LE LIVRE II



1. Deux mobiles se déplacent sur deux axes Ox et Oy avec des vitesses v et v' ; ils sont en A et en B à l'origine du temps. Trouver leur distance à l'instant t et le minimum de cette distance.

2. Deux mobiles dont les mouvements sont uniformes se déplacent, avec des vitesses v et v', l'un sur Ox, l'autre à partir d'un point A ; trouver quelle doit être la direction de celui-ci pour que les deux mobiles se rencontrent.

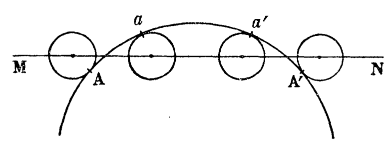


3. Une montre a trois aiguilles. Quand celle des secondes est-elle bissectrice de l'angle des deux autres ?

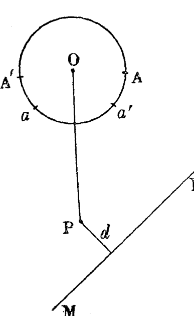
4 Une barre AB de longueur donnée se déplace de manière que ses extrémités décrivent deux droites rectangulaires et de façon que A ait un mouvement uniforme ; étudier le mouvement d'un point quelconque de la barre.

5. Les extrémités d'une barre AB de longueur donnée glissent sur deux droites rectangulaires, et le milieu de la barre a une vitesse angulaire constante ; trouver le mouvement du point A et celui du point B.

6. Un cercle de rayon R se meut et son centre décrit une droite MN avec la vitesse constante v ; il touche en A, a, a', A' un cercle fixe de rayon x et l'on donne les durées $2t$ et $2t'$ entre les contacts extérieurs et intérieurs. Calculer : 1° le rayon x du cercle fixe ; 2° la distance du centre de ce cercle à MN ; 3° la position des points de contact sur chacun des cercles.



7. On donne un cercle O et un point P à la distance y du point O, dans le plan du cercle. Une droite MN tourne dans ce plan, autour du point P, avec une vitesse angulaire ω et touche le cercle aux points A, a, a', A'. On connaît ω, les durées $2t$ et $2t'$ entre les contacts extérieurs A et A' et les contacts intérieurs a et a', enfin la distance d du point P à MN, et l'on demande de calculer : 1° le rayon x du cercle O ; 2° la distance y ; 3° les positions des points de contact sur la droite et sur le cercle.



8. Deux mouvements uniformément variés sur deux droites Ox et Oy sont définis par les formules

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2, \qquad y = v'_0 t + \frac{1}{2}\gamma' t^2.$$

Montrer qu'on peut choisir deux axes tels que les projections du mouvement résultant sur ces deux axes soient l'un uniforme, l'autre défini par $z = \frac{1}{2}\gamma'' t^2$.

9. Trois mobiles égaux se déplacent sur les côtés d'un triangle ABC, dans le sens indiqué par l'ordre alphabétique des lettres, et avec des vitesses constantes proportionnelles aux côtés ; prouver que leur centre de gravité reste fixe et généraliser.

10. Trouver le mouvement résultant de deux mouvements rectilignes sur Ox et sur Oy définis par les formules

$$x = at^n, \qquad y = bt^n.$$

11. On supprime dans la machine Morin le moulinet à ailettes qui sert de régulateur du mouvement du cylindre et on recommence ensuite les expériences. Quel est alors le chemin parcouru par le crayon sur la feuille qui enveloppe le cylindre ? Comment varie ce tracé quand on augmente le poids moteur ?

12. Une machine Morin a un rayon R et une hauteur h. Quelle doit être la vitesse angulaire de rotation du cylindre pour que le poids arrive juste sur la génératrice de départ ?

13. Un mobile quitte en un point A un wagon en mouvement uniforme et tombe en un point B. Connaissant la vitesse du wagon, trouver la distance horizontale des deux points A et B, en supposant que la vitesse initiale propre du mobile, quand il quitte le point A, soit nulle.

14. Un mobile non pesant se meut perpendiculairement à un wagon qui se déplace d'un mouvement uniforme. Le mobile est aussi animé d'un mouvement uniforme et traverse le wagon en deux points A et B ; on connaît la vitesse du wagon et sa hauteur, et l'on demande de trouver la vitesse du mobile.

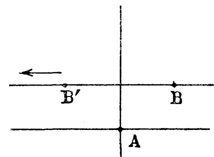
15. Un cylindre tourne autour d'un axe vertical avec une vitesse angulaire donnée ω. Un mobile décrit une verticale avec laquelle viennent coïncider successivement les génératrices du cylindre ; ce mobile, dont le mouvement est supposé uniforme, est en A sur la base supérieure à un instant donné et rencontre la base inférieure quand le point A est venu en B par suite de la rotation du cylindre. Trouver la vitesse de ce mobile connaissant le rayon et la hauteur du cylindre.

16. Les données étant les mêmes pour le cylindre, on suppose que le mobile soit pesant et tombe du point A sans vitesse initiale ; trouver la position du point A sur la base supérieure, quand le mobile rencontre la base inférieure.

17. On lance deux mobiles pesants d'un même point, de bas en haut, suivant la verticale de ce point, à θ secondes d'intervalle et avec les vitesses a et b ; on sait que les mouvements de ces deux mobiles sont uniformément retardés et l'on propose de trouver le point où ils se rencontrent et l'époque de leur rencontre.

18. On lance vers le haut un mobile pesant qui rencontre un cercle tournant avec la vitesse angulaire ω, et le perce en deux points A et A$'$, l'un en montant, l'autre en descendant. Connaissant l'angle des rayons du cercle qui aboutissent en A et en A$'$, trouver la vitesse initiale du mobile.

19. Un mobile pesant est lancé verticalement de bas en haut, avec la vitesse v_0, d'un point A. Un second mobile part en même temps d'un point B, sans vitesse initiale, et décrit d'un mouvement uniformément varié, d'accélération γ, l'horizontale qui passe par le point B dans le plan vertical des deux points A et B. On connaît en outre la distance verticale des deux points A et B.



1° Déterminer γ par la condition que les deux mobiles se rencontrent.

2° Déterminer v_0 par la condition que le second mobile arrive en un point B′ symétrique de B par rapport à la verticale du point A, quand le premier est revenu au point A.

20. On lance verticalement un point pesant dans le vide, de bas en haut, d'un point A et avec une vitesse v, puis on imagine un second mobile partant d'un point B, à 100 mètres au-dessous du point A, sur la même verticale et se dirigeant vers le premier d'un mouvement uniforme avec la vitesse a. Les deux mobiles partent au même instant. A quelle distance de B et à quel moment les deux mobiles se rencontreront-ils ? Dire si la rencontre a lieu pendant le mouvement ascendant du premier mobile ou pendant son mouvement descendant et, dans ce cas, fixer, par rapport à A et à B, le point de rencontre.

LIVRE III

DYNAMIQUE

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX ET MOUVEMENT PRODUIT PAR UNE FORCE CONSTANTE

263. **Objet de la dynamique.** — La dynamique a pour objet l'étude du mouvement et des forces qui le produisent. Elle repose sur des principes qui nous sont fournis par l'observation des phénomènes naturels. Ces principes ne sont pas évidents *a priori* et leur vérification immédiate est impossible ; mais leur exactitude est démontrée *a posteriori* par l'exactitude de leurs conséquences. Ils sont au nombre de deux : le *principe de l'inertie* et le *principe des mouvements relatifs*.

264. **Principe de l'inertie.** — Il comprend deux parties :

1° *L'état de mouvement ou de repos d'un point matériel ne peut être modifié que par l'intervention d'une force ;*

2° *Si un point matériel est en mouvement sans qu'aucune force agisse sur lui, le mouvement est rectiligne et uniforme.*

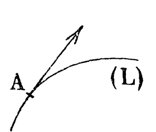
La première partie de ce principe est si bien connue qu'elle paraît évidente ; pour la deuxième nous donnerons un exemple classique. Une bille lancée sur un plan horizontal parfaitement poli se meut d'un mouvement uniforme. A la longue, il est vrai, la vitesse finit par diminuer ; mais cette diminution est d'autant plus faible que le plan et la bille sont plus parfaitement polis ; cela tient à ce que dans la nature il est impossible d'éviter les frottements. On conçoit toutefois que si le plan et la bille étaient parfaitement polis et si l'on pouvait

supprimer la résistance de l'air, le mouvement se continuerait indéfiniment suivant une ligne droite et avec une vitesse constante.

265. **Conséquences.** — Voici tout de suite quelques conséquences importantes du principe de l'inertie.

1° Supposons qu'à un instant quelconque un point matériel primitivement au repos se mette en mouvement : il résulte du principe de l'inertie que le point est soumis à une force.

2° Concevons qu'un point matériel en mouvement sous l'action d'une force F décrive une ligne (L). Si la force cesse d'agir quand le mobile passe au point A de sa trajectoire, en vertu de la deuxième partie du principe de l'inertie, le mouvement devient un mouvement rectiligne et uniforme avec une vitesse égale en grandeur et sens à la vitesse du mobile quand il passe au point A. Cette vitesse étant dirigée suivant la tangente en A à la ligne (L), la trajectoire du mouvement uniforme sera la tnagente en A.



266. **Principe des mouvements relatifs.** — *Lorsqu'un système de points matériels* libres *est animé d'un mouvement de* translation *quelconque, toute force agissant sur un point du système lui imprime le même mouvement relatif que si le système était au repos.*

Ce principe, dû à Galilée, n'est plus vrai quand le mouvement au lieu d'être un mouvement de translation est quelconque. Par exemple, si l'on veut étudier le mouvement à la surface de la Terre, il est nécessaire de tenir compte de la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même, mais non de sa vitesse de translation autour du Soleil. L'effet de ce mouvement de rotation est d'ailleurs de faire dévier vers l'est la trajectoire des corps qui tombent sous l'action de la pesanteur.

267. **Conséquence.** — *Si, parmi les forces qui agissent sur un point matériel libre* M, *on considère en particulier une force* F, *constante ou variable, le mouvement du point s'obtient en composant, par les règles des mouvements relatifs, celui que pren-*

drait le point M *partant du repos et soumis seulement à la force* F, *avec celui que prendrait ce point si l'on supprimait la force* F.

En effet, on peut considérer le point M comme faisant partie d'un système qui aurait le même mouvement de translation que le point M quand la force F n'agit pas sur lui ; si alors on fait agir la force F sur le point M seul, on se trouve dans les conditions de la loi de Galilée, et le mouvement relatif sera le même que si le système était au repos.

Donc, pour avoir le mouvement absolu du point M, il suffira de composer, au moyen des règles établies en cinématique, le mouvement qu'aurait le point, abstraction faite de la force F, avec celui du point M dans le système si celui-ci était au repos et que la force F agisse seule.

268. Remarque. — Cette conséquence renferme les deux lois suivantes, qu'on invoque souvent en dynamique :

1° *Loi de l'indépendance des effets des forces.* — Lorsque plusieurs forces agissent sur un point matériel libre et au repos, il suffit, pour avoir le mouvement qu'elles lui impriment, de composer ceux que produiraient séparément les différentes forces sur le point partant du repos.

2° *Loi de l'indépendance de l'effet d'une force et de la vitesse antérieurement acquise.* — Lorsqu'on fait agir une force F sur un point matériel en mouvement, pour avoir le mouvement résultant il suffit de composer le mouvement dû à la vitesse acquise avec le mouvement que prendrait le point s'il partait du repos sous l'action de la force F.

269. **Extension de la notion d'équilibre.** — Lorsque plusieurs forces se font équilibre sur un corps au repos, elles se font également équilibre quand le corps est en mouvement, ce qui signifie que leur introduction ou leur suppression ne modifie pas l'état du corps. Soit, en effet, S le système formé par les forces considérées ; supposons que le corps soit en mouvement et que l'on fasse agir les forces S à un instant donné. En vertu du principe de l'indépendance des effets des forces et de la vitesse acquise, le mouvement du corps s'obtiendra

en composant le mouvement dû à la vitesse acquise avec le mouvement que les forces lui imprimeraient s'il partait du repos. Comme dans ce dernier cas les forces ne produisent aucun mouvement, il en résulte que le mouvement du corps ne sera pas modifié par l'introduction des forces du système S.

Il suit alors de là et de la deuxième partie du principe de l'inertie que si un corps est en mouvement sous l'action de plusieurs forces qui se font équilibre, le mouvement est rectiligne et uniforme, et réciproquement. D'après cela nous dirons qu'un système de forces appliquées à un corps en mouvement et *soumis seulement à l'action de ces forces* est en équilibre quand le mouvement est un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Quand on emploie les machines pour la production du mouvement, on règle toujours les forces qui agissent sur les machines de manière que le mouvement soit uniforme : les forces servent alors uniquement à vaincre les résistances dues au frottement des divers organes de la machine ou à la résistance de l'air.

270. **Définition d'une force constante.** — On dit qu'une force est *constante* en grandeur, direction et sens quand, appliquée au même point matériel partant du repos et à des instants quelconques, elle lui communique toujours le même mouvement, c'est-à-dire qu'elle lui imprime toujours le même déplacement pendant le même temps.

271. **Mouvement produit par une force constante. — Théorème.** — *Lorsqu'une force constante en grandeur et en direction agit sur un point matériel partant du repos, ou animé d'une vitesse initiale dans la direction de la force, elle lui communique un mouvement rectiligne et uniformément varié.*

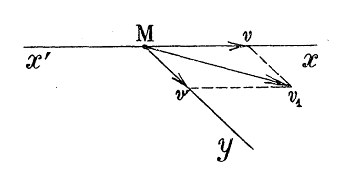
Nous *admettrons*, par raison de symétrie, que le mouvement est rectiligne suivant la direction de la force donnée, F. Il reste alors à prouver qu'il est uniformément varié. Il suffit de prouver, pour cela, que la vitesse croît de quantités égales dans des temps égaux à θ. Or, appelons γ la vitesse commu-

niquée par la force, au bout du temps θ, quand on la fait agir sur le point matériel partant du repos, et soit v la vitesse du point à un instant quelconque t de son mouvement. Imaginons que l'on fasse agir la force pendant le temps θ qui succède à l'instant t. Pour avoir la vitesse au bout de ce temps, c'est-à-dire à l'instant $t+\theta$, il faut composer la vitesse acquise avec la vitesse communiquée au bout du temps θ par la force agissant sur le point partant du repos. Le mouvement étant rectiligne suivant la direction de la force, la vitesse v a même direction que la force ; mais, d'autre part, si la force agit pendant le temps θ sur le point partant du repos, elle lui communique au bout de ce temps une vitesse γ dirigée aussi suivant la force. Donc la vitesse du mobile à l'instant $t+\theta$ est égale à $v+\gamma$, car les deux vitesses ayant la même direction, la vitesse résultante est égale à leur somme algébrique.

Ainsi, au bout d'un intervalle de temps θ, succédant à un instant quelconque t, la vitesse du mobile s'accroît toujours de γ. Cela revient évidemment à dire que la vitesse croît de quantités égales dans des temps égaux et, par suite, que le mouvement est uniformément varié.

272. **Théorème.** — *Réciproquement, tout mouvement rectiligne et uniformément varié est produit par une force constante en grandeur et en direction, la direction de la force étant celle du mouvement.*

Considérons en effet un point matériel décrivant la droite $x'x$ d'un mouvement uniformément varié. Il est clair, d'abord, que le point est soumis à l'action d'une force, sans quoi, en vertu de la deuxième partie du principe de l'inertie, le mouvement serait non pas uniformément varié, mais uniforme. Je dis maintenant que la force a toujours la même direction que le mouvement. Supposons en effet qu'à l'instant t, où le mo-



bile passe en un point M de sa trajectoire, la direction de la force soit différente de Mx et soit My. Appelons v' la vitesse que cette force communiquerait au bout du temps très petit Δt au point matériel partant du repos. Pour avoir la vitesse du mobile à l'instant $t + \Delta t$, il faut (loi de l'indépendance de l'effet d'une force et de la vitesse acquise) composer v avec v' d'après la règle du parallélogramme des vitesses, ce qui donne une vitesse v_1 de direction différente de Mx ; la direction de la vitesse étant la même que celle du déplacement, on voit que celui-ci ne se ferait pas suivant Mx, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc la direction de la force est la même que celle du mouvement.

Il reste enfin à prouver que la force est constante en grandeur. Mais cela résulte de ce que la vitesse variant de quantités égales dans des temps égaux, la force communique toujours le même mouvement, au bout du même temps, au point matériel partant du repos.

273. Exemple. — Lorsqu'un corps tombe dans le vide en partant du repos, on reconnait que le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré. L'accélération de ce mouvement en un même lieu est la même pour tous les corps ; on la représente par la lettre g, et elle est égale à 9,8096 à Paris. Il résulte alors du théorème précédent, que tout corps qui tombe dans le vide est soumis à l'action d'une force constante en grandeur et direction : cette force est ce qu'on appelle le *poids du corps*.

CHAPITRE II

PROPORTIONNALITÉ DES FORCES ET DES ACCÉLÉRATIONS ; MASSE

274. **Théorème.** — *Le rapport de deux forces constantes est égal au rapport des accélérations qu'elles produisent séparément sur un même point matériel partant du repos ou animé d'une vitesse initiale dans la direction de la force.*

Soient en effet F et F′ deux forces constantes, γ et γ' les accélérations des mouvements rectilignes et uniformément variés qu'elles communiquent séparément à un même point matériel partant du repos. Supposons d'abord que les deux forces aient une commune mesure f, et soit

$$F = nf, \qquad F' = n'f,$$

de sorte que

$$\frac{F}{F'} = \frac{n}{n'}.$$

La force f agissant seule sur le point matériel partant du repos lui communique une certaine accélération φ ; supposons alors que l'on fasse agir simultanément n forces égales à f dans la même direction, qui sera la direction de la vitesse initiale si le point est animé d'une vitesse initiale ; en vertu d'une remarque faite numéro 267, le mouvement du point sous l'action simultanée de toutes ces forces s'obtient en composant les mouvements produits par chacune d'elles individuellement et, comme toutes les forces agissent dans la même direction, l'accélération du mouvement résultant est égale à la somme des accélérations des mouvements composants, c'est-à-dire à $n\varphi$. On a donc

$$\gamma = n\varphi,$$

et l'on prouverait de même que l'on a

$$\gamma' = n'\varphi ;$$

on tire de là

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{n}{n'},$$

et par suite

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}. \tag{1}$$

Supposons maintenant que les deux forces n'aient pas de commune mesure et soit f une force contenue un nombre exact de fois dans F' ; supposons que cette force f soit contenue m fois dans F mais n'y soit pas contenue $m+1$ fois, de sorte que si elle est contenue p fois dans F', $\frac{m}{p}$ et $\frac{m+1}{p}$ seront les valeurs approchées du rapport $\frac{F}{F'}$ à $\frac{1}{p}$ près par défaut et par excès.

D'après ce qui a été dit plus haut, si l'on appelle φ l'accélération du mouvement que prendrait le point matériel partant du repos et soumis seulement à l'action de la force f, on a

$$\gamma' = p\varphi\,;$$

d'autre part, en vertu aussi de ce qui a été dit plus haut, et puisque la force F est plus grande que m forces f mais plus petite que $m+1$ de ces forces, on a aussi

$$m\varphi < \gamma < (m+1)\varphi.$$

Il suit de là que $\frac{m}{p}$ et $\frac{m+1}{p}$ sont aussi les valeurs approchées du rapport $\frac{\gamma}{\gamma'}$ à $\frac{1}{p}$ près par défaut et par excès. Le raisonnement étant indépendant de la valeur du nombre p, on voit que les deux nombres $\frac{F}{F'}$ et $\frac{\gamma}{\gamma'}$ ont toujours les mêmes valeurs approchées à $\frac{1}{p}$ près, donc ils sont égaux par définition et l'on a

$$\frac{F}{F'} = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

275. Remarques. — 1° Le poids P d'un point matériel lui imprime une accélération g ; si donc F est une force constante et γ l'accélération qu'elle imprime au même point partant du repos, on a

$$\frac{F}{P} = \frac{\gamma}{g},$$

d'où l'on tire

$$\gamma = g\,\frac{F}{P}. \tag{2}$$

Si l'on considère une même force F agissant sur divers points matériels, g étant constant pour le même lieu, P est la seule variable du second membre de la formule (2) : cette formule montre alors que *l'accélération produite par une force est inversement proportionnelle au poids du point matériel auquel elle est appliquée.*

2° Si dans l'égalité (1) les deux membres ne représentent pas seulement des rapports mais des quotients dont les termes sont les mesures des forces et des accélérations, on peut changer les moyens de place et l'on a

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'};$$

d'où il suit que *si différentes forces agissent sur un même point matériel, le rapport de chaque force à l'accélération correspondante est constant.*

276. **Définition de la masse.** — On appelle *masse* d'un point matériel le rapport constant des mesures d'une force constante et de l'accélération qu'elle produit sur ce point. Il résulte en effet de la remarque précédente que si plusieurs forces constantes F, F′, F″,... produisent sur le même point matériel les accélérations respectives γ, γ', γ'', ..., on a

$$\frac{F}{\gamma} = \frac{F'}{\gamma'} = \frac{F''}{\gamma''} = \cdots \tag{3}$$

La valeur commune, m, de ces rapports est la *masse* du point matériel. Si d'ailleurs la masse du point matériel et l'accélération que lui imprime la force F sont connues, on a

$$F = m\gamma, \tag{4}$$

en vertu même de la définition de m.

277. **Unité de masse.** — L'unité de masse résulte de la définition même de la masse, dès qu'on a choisi les unités de longueur, de temps et de force. Si en effet dans l'équation (4)

on fait $m = 1$, on a $F = \gamma$; dès lors *l'unité de masse est celle pour laquelle la force a même mesure que l'accélération.*

On a en particulier pour l'unité de masse

$$P = g,$$

P désignant le poids du point matériel de masse 1; donc si l'on a pris pour unité de force le poids d'un décimètre cube d'eau distillée à 4°,1 et à la latitude de Paris, l'unité de masse est celle dont le poids à Paris est

$$g = 9^{\text{kg}},8096$$

ou la masse de 9,8096 litres d'eau distillée, etc.

La masse d'un corps formé par la réunion de plusieurs autres est égale à la somme des masses. En effet, si l'on a un corps dont le poids P est égal à la somme des poids p, p' p'' de plusieurs autres corps, c'est-à-dire, si l'on a alors

$$P = p + p' + p'',$$

on a aussi

$$\frac{P}{g} = \frac{p}{g} + \frac{p'}{g} + \frac{p''}{g}.$$

Si donc les masses respectives de ces corps sont M, m, m', m'', on a

$$M = m + m' + m''.$$

Il résulte évidemment de tout ceci que la masse d'un corps peut être évaluée au moyen de son poids.

On appelle *densité absolue* d'un corps la masse de l'unité de volume, de sorte que si M est la masse de ce corps, V son volume et D sa densité absolue, on a

$$D = \frac{M}{V}.$$

Le *poids spécifique* d'un corps étant le poids de l'unité de volume, si P est le poids du corps et d son poids spécifique, on a

$$D = \frac{1}{g}\frac{P}{V} = \frac{d}{g}.$$

278. Remarque importante. — Il y a une remarque essentielle à faire, au sujet de la masse. Par définition, la masse d'un point matériel dépend de la force et de l'accélération; celle-ci dé-

pend à son tour du temps et de l'espace parcouru, de sorte que la masse dépend à la fois de l'unité de force, de l'unité de longueur et de l'unité de temps.

Les égalités (3) supposent toutes les forces évaluées avec la même unité de force et toutes les accélérations avec les mêmes unités de longueur et de temps ; le nombre obtenu pour la masse m et l'unité de masse elle-même dépendent de ces unités.

Ainsi, supposons qu'une force de 3^{kg} produise une accélération de 2 mètres par seconde ; les unités étant le kilogramme, le mètre et la seconde, la masse est égale à $\frac{3}{2} = 1{,}5$. Mais supposons maintenant que l'on prenne pour unités le gramme, le centimètre et la minute ; comme la force de 3^{kg} ou de 3000^{gr} produirait l'accélération de 200 centimètres par seconde, elle produirait l'accélération $200 \times 60^{2\,cm}$ par minute, car la formule $x = \frac{1}{2}\gamma t^2$ montre que l'accélération est le double de l'espace parcouru pendant l'unité de temps qui est maintenant la seconde. La masse avec les nouvelles unités serait donc

$$\frac{3000}{200 \times 60^2} = \frac{1}{240}.$$

Pour savoir quelle est l'unité de masse dans ce système, je reprends la forme $P = g$. L'accélération due à la pesanteur est, comme on vient de le voir, le double de l'espace parcouru pendant l'unité de temps, c'est-à-dire pendant 60 secondes ; cet espace est égal à

$$9{,}8096 \times 100 \times 60^2$$

centimètres, et l'unité de masse est celle qui pèse à Paris, dans le vide,

$$9{,}8096 \times 100 \times 60^2$$

grammes, c'est-à-dire la masse de

$$9{,}8096 \times 100 \times 60^2$$

centimètres cubes d'eau distillée à 4°,1, ou enfin la masse d'un nombre de litres exprimé par

$$\frac{9{,}8096 \times 100 \times 60^2}{1000} = 3531^{lit},456.$$

279. **Unités absolues ; système C. G. S.** — Il y a inconvénient à faire dériver l'unité de masse de l'unité de force comme nous l'avons fait plus haut. En effet, ainsi que Gauss l'a remarqué le premier, si l'on prend le kilogramme pour unité de force, le poids de cette unité n'est pas le même en tous les points de la terre ; à l'équateur par exemple il est plus faible qu'au pôle. Sur les plateaux d'une balance, deux poids d'un kilogramme se font équilibre en n'importe quel lieu de la terre, et par suite l'évaluation du poids des corps au moyen des poids marqués ne sera pas changée, mais l'effet du même poids sur un dynamomètre ne sera pas le même d'un lieu à un autre. Il suit de là que si l'on voulait, de cette manière, rapporter les forces à une unité invariable, il faudrait un poids-étalon pour chaque lieu.

Pour éviter cet inconvénient, au lieu de faire dériver l'unité de masse de l'unité de force, on fait l'inverse. A cet effet, on observe que la masse d'un corps est la même en tous les points de la terre ; car, si l'on appelle g et g' les accélérations imprimées par la pesanteur au même corps et en deux lieux différents où le corps pèse P et P', on a

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g'} = m.$$

Un poids-étalon étant alors fixé en un lieu déterminé à la surface de la terre, on pourra prendre la masse de ce corps comme unité de masse ; l'unité de force s'en déduira par la formule

$$p = mg,$$

et sera égale à la force qui communique l'unité d'accélération à l'unité de masse.

Il est bon d'entrer ici dans quelques détails relativement au choix des unités dans la mesure des grandeurs. L'évaluation d'une grandeur quelconque se fait au moyen d'une autre grandeur de même espèce qu'on appelle *unité*. Parmi les grandeurs que l'on a à mesurer, il y en a dont on peut faire dériver la mesure de celle d'autres grandeurs d'espèce différente : telles sont par exemple les aires et les volumes en

géométrie dont la mesure dérive de celle des longueurs. Pour cette raison, les aires et les volumes sont appelés des *grandeurs dérivées*, tandis que les longueurs sont appelées grandeurs fondamentales.

En mécanique on rencontre trois grandeurs fondamentales qui sont : les longueurs, les temps et les masses ; toutes les autres grandeurs, forces, vitesses, accélérations, etc., peuvent être considérées comme dérivées de celles-là. La mesure des grandeurs que l'on rencontre en mécanique dépend donc du choix de trois unités fondamentales : unité de longueur, unité de temps et unité de masse. Fixer ces unités au moyen d'éléments naturels et autant que possible invariables, c'est faire choix d'un système d'unités absolues.

Le système d'unités absolues universellement adopté maintenant est le système C. G. S. (centimètre-gramme-seconde).

Dans ce système :

1° L'*unité de longueur* est le *centimètre*, c'est-à-dire la centième partie du mètre-étalon déposé aux Archives nationales et qui est à peu près égal à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre ;

2° L'*unité de temps* est la *seconde* sexagésimale de temps solaire moyen ; elle dépend à la fois du mouvement de la Terre sur elle-même et de son mouvement de translation autour du Soleil ;

3° L'*unité de masse* est le *gramme-masse*, c'est-à-dire la masse d'un centimètre cube d'eau distillée à 4°,1 et dont le poids à Paris, dans le vide, est à peu près la millième partie du kilogramme-étalon déposé aux Archives.

En vertu de ce qui a été dit plus haut la force doit être considérée comme une grandeur dérivée, et nous avons appelé unité de force celle qui communique l'unité d'accélération à l'unité de masse. L'unité de force s'appelle la *dyne*.

Cherchons à exprimer en dynes le poids, à Paris, de l'unité de masse. Pour cela faisons $m = 1$ dans la formule $p = mg$; il vient $p = g$. Donc le poids de l'unité de masse est g. Or,

à cause de l'unité de longueur, on a, à Paris, $g = 980{,}96$; donc le poids cherché est égal à $980^{\text{dynes}},96$.

280. **Quantité de mouvement.** — On appelle *quantité de mouvement* d'un point matériel à un instant donné, le produit mv de la masse du point par sa vitesse à cet instant.

281. **Théorème.** — *Si deux points matériels, de masses respectives* m *et* m', *partent simultanément du repos sous l'action de deux forces constantes* F *et* F', *leurs quantités de mouvement au même instant sont proportionnelles aux forces.*

Les forces étant constantes, les mouvements qu'elles impriment aux deux points matériels sont uniformément variés. Soient γ et γ' les accélérations de ces deux mouvements, v et v' les vitesses des deux mobiles à l'instant t. On a successivement

$$F = m\gamma, \qquad F' = m'\gamma' \qquad \text{et} \qquad \frac{F}{F'} = \frac{m\gamma}{m'\gamma'} = \frac{m\gamma t}{m'\gamma' t}.$$

Mais on a aussi

$$v = \gamma t, \qquad v' = \gamma' t' ;$$

par suite,

$$\frac{F}{F'} = \frac{mv}{m'v'}.$$

282. **Corollaire.** — *Si deux points matériels, de masses respectives* m *et* m', *partent simultanément du repos sous l'action de deux forces constantes et égales, leurs vitesses* v *et* v' *au même instant sont inversement proportionnelles à leurs masses.*

En effet, si l'on fait $F = F'$ dans l'égalité précédente, il vient successivement

$$mv = m'v',$$

$$\frac{v}{v'} = \frac{m'}{m}.$$

C'est ainsi que la force de la poudre dans une arme à feu imprime à l'arme un mouvement de recul dont la vitesse est inversement proportionnelle à celle du projectile.

283. **Expression d'une force variable au moyen de la masse et de l'accélération. — Théorème.** — *Une force constante ou va-*

riable agissant sur un point matériel est égale au produit de la masse de ce point par l'accélération qu'elle lui imprime.

Supposons d'abord une force constante F agissant sur un point matériel de masse m et lui imprimant une accélération γ ; d'après la définition même de la masse, on a

$$\frac{F}{\gamma} = m, \qquad \text{d'où} \qquad F = m\gamma.$$

Considérons maintenant une force, variable avec le temps, agissant sur un point matériel de masse m et lui communiquant un mouvement rectiligne. Si l'on appelle v et $v + \Delta v$ les vitesses de ce point aux instants t et $t + \Delta t$, l'accélération moyenne pendant l'intervalle de temps Δt a pour expression $\frac{\Delta v}{\Delta t}$; mais si Δt est très petit, on peut considérer la force comme constante dans cet intervalle, de sorte que sa valeur, en vertu du premier cas, est $m\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Il en résulte que si Δt tend vers zéro, la valeur de la force à l'instant t est égale à la limite du produit $m\frac{\Delta v}{\Delta t}$; or, si l'on appelle F et γ les valeurs respectives de la force et de l'accélération à l'instant t, on a

$$\text{lim.}\ m\frac{\Delta v}{\Delta t} = m\gamma,$$

et par suite

$$F = m\gamma,$$

ce qui démontre la proposition.

284. **Application.** — Cette formule donne la solution des deux problèmes suivants :

1° *Trouver la force qui produit un mouvement rectiligne dont la formule des espaces est donnée ;*

2° *Trouver le mouvement produit par une force donnée en fonction du temps.*

Pour résoudre le premier problème, il suffit de rappeler que dans un mouvement rectiligne quelconque, l'accélération à un instant quelconque est égale à la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps ; de sorte que si

$$x = f(t)$$

est la formule des espaces, on a

$$\gamma = f''(t),$$

et, par suite, $$\mathrm{F} = mf''(t).$$

Quant au second problème, il suffit de remarquer que la relation $\mathrm{F} = m\gamma$ donne

$$\gamma = \frac{\mathrm{F}}{m},$$

ce qui fait connaître l'accélération à un instant quelconque. On en déduit la loi des vitesses, puis la loi des espaces, comme cela a été expliqué numéro 240.

Par exemple, si la formule des espaces est

$$x = a \cos t\sqrt{k},$$

on a successivement

$$v = -a\sqrt{k} \sin t\sqrt{k},$$

$$\gamma = -ak \cos t\sqrt{k} = -kx.$$

Il en résulte

$$\mathrm{F} = -mkx,$$

c'est-à-dire que le mouvement est produit par une force attractive, proportionnelle à la distance et émanant de l'origine des abscisses.

Le mouvement défini par cette équation,

$$x = a \cos t\sqrt{k},$$

est ce qu'on appelle un mouvement *vibratoire simple*. Le mobile oscille indéfiniment entre les points A et A' de sa trajectoire, correspondant aux abscisses a et $-a$. La durée d'une oscillation, c'est-à-dire le temps employé pour parcourir la distance AA', est égale à $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

A' A
x' O x

Inversement, si un point est attiré proportionnellement à la distance par une force

$$\mathrm{F} = -mkx,$$

et si, à l'instant zéro, quand son abscisse est x_0, sa vitesse initiale est nulle, son mouvement est défini par l'équation

(1) $$x = x_0 \cos t\sqrt{k}.$$

En effet, si on cherche la force qui produit le mouvement défini par l'équation (1) on trouve, d'après ce qui précède,

$$F_1 = -mkx = F.$$

Par suite, le mobile considéré et celui dont le mouvement est défini par l'équation (1) sont, à chaque instant, soumis à la même force et, comme ils occupent la même position initiale, qu'ils ont de plus la même vitesse initiale zéro, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, leurs mouvements sont confondus ; donc le mouvement produit par la force $F = -mkx$, lorsque la vitesse initiale est nulle, est bien défini par l'équation (1). La durée d'une oscillation est $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

CHAPITRE III

MOUVEMENT DES PROJECTILES DANS LE VIDE

285. **Définition.** — Un *projectile* est un corps soumis à l'action de la pesanteur et lancé dans une certaine direction avec une vitesse initiale donnée. Nous supposerons le corps réduit à un point matériel et nous négligerons la résistance de l'air ; de sorte que la question se ramène à l'étude du mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force constante en grandeur et en direction, et auquel on a imprimé une vitesse initiale donnée. Nous appellerons g l'accélération imprimée par la pesanteur à ce point matériel partant du repos et nous diviserons le problème en plusieurs autres.

286. **Problème I.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant abandonné à lui-même sans vitesse initiale à une certaine hauteur au-dessus du sol.*

Appelons x le chemin parcouru par le mobile pendant le temps t et compté à partir du point de départ. Le point étant soumis à une force constante, son mouvement est uniformément accéléré ; si donc g est l'accélération dirigée dans le même sens que la force, c'est-à-dire de haut en bas, on a, en vertu des formules qui ont été établies en cinématique,

$$(1) \qquad x = \frac{1}{2} g t^2,$$

et par suite

$$(2) \qquad v = g t.$$

La première de ces deux formules donne l'espace parcouru pendant le temps t et la deuxième donne la vitesse au bout du même temps. Si on élimine t entre les deux, on obtient

$$v^2 = 2 g x,$$

formule qui fait connaître la vitesse en fonction de l'espace parcouru.

287. **Application.** — *Un point matériel pesant est abandonné à lui-même sans vitesse initiale sur la verticale $x'x$. Il occupe une position donnée* A *à un instant inconnu et parcourt un chemin donné h pendant le temps θ, à partir de cet instant ; trouver sa position initiale.*

Soit O la position initiale du mobile. Posons $OA = x$ et appelons t le temps employé à parcourir ce chemin ; on a en vertu de l'équation (1)

x'

O

A

B

x

$$x = \frac{1}{2} g t^2.$$

D'autre part, à la suite du chemin x et pendant le temps θ, le mobile parcourt le chemin h, c'est-à-dire qu'il parcourt le chemin $x + h$ pendant le temps $t + \theta$; la même formule donne donc encore

$$x + h = \frac{1}{2} g(t + \theta)^2.$$

Ces deux équations font connaître t et x. On en tire d'abord par soustraction

$$t = \frac{2h - g\theta^2}{2g\theta}$$

et ensuite
$$x = \frac{(2h - g\theta^2)^2}{8g\theta^2}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que t soit positif, ce qui exige que l'on ait $h > \frac{g\theta^2}{2}$.

288. **Problème II.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant lancé verticalement de haut en bas avec une vitesse initiale v_0.*

Le mouvement du mobile est encore un mouvement uniformément accéléré et peut être considéré comme résultant de deux autres s'effectuant de haut en bas suivant la verticale :

1° Un mouvement uniforme avec la vitesse v_0 et en vertu duquel l'espace parcouru au bout du temps t est $v_0 t$;

2° Un mouvement uniformément accéléré qui est le même que si le point partait du repos, dont l'accélération est g, et

dont, par suite, le chemin parcouru pendant le temps t est $\frac{1}{2}gt^2$. Le chemin parcouru pendant le même temps dans le mouvement résultant sera donc

(3) $$x = v_0t + \frac{1}{2}gt^2;$$

on tire de là la formule

(4) $$v = v_0 + gt$$

pour calculer la vitesse.

289. Remarque. — On aurait pu écrire les deux formules (3) et (4) immédiatement, puisqu'on sait que le mouvement est uniformément accéléré, que la vitesse initiale est v_0 et l'accélération g.

290. **Problème III.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale* v_0.

Prenons comme direction positive sur la verticale Ox la direction contraire à celle de la pesanteur et soit O le point de départ du mobile. On peut encore considérer le mouvement comme résultant de deux autres :

1° Un mouvement uniforme suivant Ox avec la vitesse initiale v_0; 2° un mouvement uniformément varié suivant Ox' avec l'accélération g que la pesanteur imprime au point matériel partant du repos. En vertu du premier mouvement l'abscisse du mobile par rapport au point O est v_0t, au bout du temps t écoulé à partir de l'instant où le point a été lancé ; en vertu du second, l'abscisse au bout du même temps est $\frac{1}{2}gt^2$ puisque le mouvement s'effectue dans le sens des abscisses négatives. L'abscisse du point dans le mouvement résultant sera donc

(5) $$x = v_0t - \frac{1}{2}gt^2;$$

on en déduit la formule des vitesses,

(6) $$v = v_0 - gt,$$

et l'élimination de t entre les deux équations donne

(7) $$v^2 = v_0^2 - 2gx :$$

cette nouvelle formule donne l'expression de la vitesse en fonction de l'abscisse.

Voici quelles sont les propriétés du mouvement déduites des équations (5), (6) et (7) :

1° D'après l'équation (6) la vitesse diminue lorsque t augmente ; elle devient nulle pour $t = \frac{v_0}{g}$, de sorte que si l'on fait croître t de zéro à $\frac{v_0}{g}$ la vitesse décroît de v_0 à zéro. En se reportant à l'équation (5) on voit que pendant le même temps l'espace parcouru x est positif et croît, parce que dans le trinome du second degré qui figure au second membre le coefficient de t^2 est négatif ; d'ailleurs $\frac{v_0}{g}$ est égal à la demi-somme des racines, et par suite lorsque $t = \frac{v_0}{g}$ la valeur de x est maximum : cette valeur maximum est égale à $\frac{v_0^2}{2g}$ et, en se reportant à la formule $v^2 = 2gx$ du problème I, on reconnaît que la hauteur maximum à laquelle s'est élevé le mobile *est celle de laquelle il faudrait le laisser tomber, sans vitesse initiale, pour lui faire acquérir la vitesse* v_0 *à la fin de sa chute.*

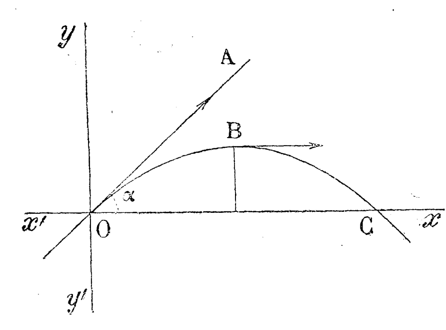
2° Lorsque t continue à croître à partir de $\frac{v_0}{g}$, la vitesse devient négative, x diminue et le mobile descend d'un mouvement uniformément accéléré ; x devient nul lorsque $t = \frac{2v_0}{g}$, d'où il suit que *le mobile met à descendre le même temps qu'à monter*. Ajoutons, ce qui est évident sur l'équation (6), que sa vitesse quand il revient au point de départ est égale à $-v_0$, c'est-à-dire à la vitesse au départ changée de signe.

3° Il résulte du reste de l'équation (5) et des propriétés du trinome du second degré qu'il y a deux valeurs de t pour lesquelles l'abscisse x est la même, pourvu qu'elle soit inférieure

à la valeur maximum $\frac{v_0^2}{2g}$; ces deux valeurs de t sont équidistantes de la demi-somme, $\frac{v_0}{g}$, des racines. On voit donc que le mobile passe deux fois par toute position M située entre le sol et le point le plus élevé A ; on voit de plus que le temps qu'il emploie pour aller de M en A en montant est égal au temps employé pour descendre de A en M ; on voit enfin, en se reportant à l'équation (6), que les vitesses du mobile au moment de ses deux passages en un point M sont égales et de signes contraires, puisque les valeurs de t qui correspondent à ces deux passages sont équidistantes de $\frac{v_0}{g}$.

291. **Problème IV.** — *Étudier le mouvement d'un point matériel pesant lancé dans une direction donnée avec une vitesse initiale donnée.*

Soient O le point de départ et OA la direction donnée ; appelons α l'angle que cette direction fait avec sa projection sur un plan horizontal et soit v_0 la vitesse initiale du mobile. Comme la pesanteur agit dans le plan vertical qui contient OA, le point matériel ne sortira pas de ce plan vertical. Rapportons donc le mouvement à deux axes rectangulaires situés dans ce plan, savoir : la verticale yOy' et la perpendiculaire xOx'. Prenons du reste comme direction des abscisses positives celle qui fait l'angle aigu α avec la direction OA, et pour direction positive des ordonnées la direction de la verticale qui est dirigée vers le haut. Soit enfin g l'accélération communiquée par la pesanteur au point matériel.



Cela posé, le mouvement de ce point peut être considéré comme résultant de deux mouvements : 1° un mouvement

uniforme suivant la direction OA avec la vitesse v_0 ; 2° un mouvement uniformément varié suivant la verticale s'effectuant en sens contraire des ordonnées positives et par suite avec l'accélération $-g$.

En vertu du premier mouvement, l'espace parcouru par le mobile sur OA serait, au bout du temps t,

$$\rho = v_0 t \; ; \tag{1}$$

en vertu du second, l'espace parcouru suivant la verticale serait, au bout du même temps,

$$y_1 = -\frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Puisque le mouvement résulte de la composition de ces mouvements, la position du mobile au temps t sera définie par les équations simultanées (1) et (2). Ces équations donnent en réalité les coordonnées du mobile rapporté aux axes OA et Oy ; il en résulte que ses coordonnées par rapport aux axes Ox et Oy sont

$$\left\{ \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Ces équations définissent la trajectoire et donnent toutes les circonstances du mouvement.

Équation et forme de la trajectoire. — Cherchons d'abord l'équation et la nature de la trajectoire. L'équation s'obtient en éliminant t entre les équations (3), ce qui donne

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \; ; \tag{4}$$

d'où il suit que la trajectoire est une parabole dont l'axe est vertical et dirigé vers le bas, puisque le coefficient de x^2 est négatif.

Vitesse en un point. — Étudions maintenant la loi des vitesses. Les composantes de la vitesse à un instant donné t sont, en vertu des équations (3),

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \tag{5}$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t, \tag{6}$$

v_x et v_y désignant les composantes respectives suivant Ox et Oy. Il résulte de ces équations que la vitesse horizontale est constante et que la vitesse verticale diminue quand le temps augmente. Cette dernière composante est nulle lorsque $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, et alors la vitesse se réduit à sa composante horizontale, c'est-à-dire que la tangente à la trajectoire est horizontale. La position correspondante du mobile s'obtient en remplaçant t par $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ dans les équations (3), ce qui donne

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \\ y &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \end{aligned} \right.$$

Ces équations définissent évidemment le sommet B de la parabole décrite par le point matériel ; elles montrent en particulier que l'élévation y du sommet au-dessus du plan horizontal est égale à la hauteur qu'atteint un mobile lancé verticalement suivant Oy avec la vitesse initiale $v_0 \sin \alpha$.

Revenant maintenant aux équations (5) et (6) on voit que v_y prend des valeurs égales et de signes contraires pour les valeurs de t équidistantes de $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$; comme la composante horizontale de la vitesse est constante, aux points correspondants de la trajectoire les tangentes sont également inclinées sur l'axe des x. Ces points sont symétriques par rapport à l'axe de la parabole ; car, en vertu de la deuxième équation (3), y prend des valeurs égales quand on donne à t des valeurs équidistantes de $\frac{v_0 \sin \alpha}{g}$.

Enfin le carré de la valeur numérique de la vitesse s'obtient en faisant la somme des carrés des équations (5) et (6), ce qui donne

$$v^2 = v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + g^2 t^2,$$

c'est-à-dire, en comparant avec la valeur de y fournie par les équations (3),

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Il en résulte que la vitesse est minimum lorsque y est maximum, c'est-à-dire quand le point est au sommet de la parabole; la valeur minimum d'ailleurs déjà obtenue est $v_0 \cos \alpha$. Ainsi, quand le mobile se déplace depuis le point O jusqu'au sommet B, la vitesse décroît depuis v_0 jusqu'à $v_0 \cos \alpha$; elle croît ensuite et croîtrait indéfiniment si le mobile n'était pas arrêté par le sol.

Amplitude du jet. — On appelle ainsi l'abscisse du point C où le projectile frappe le sol; on l'obtient en faisant $y = 0$ dans l'équation de la parabole, ce qui donne

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

On voit, ce qui était du reste évident *a priori*, qu'elle est double de l'abscisse du sommet. Quand le mobile arrive en C, sa vitesse est égale à la vitesse initiale v_0.

L'amplitude du jet est proportionnelle au carré de la vitesse et dépend en outre de l'angle α. Pour une même vitesse initiale elle est maximum lorsque $\sin 2\alpha = 1$, c'est-à-dire lorsque $\alpha = 45°$; elle est alors égale à $\frac{v_0^2}{g}$.

Enfin, elle reste évidemment la même quand on donne à α des valeurs complémentaires.

Direction suivant laquelle il faut lancer le projectile pour atteindre un point donné. — Soient a et b les coordonnées du point donné; elles doivent vérifier l'équation (4), et par suite les valeurs de α qui définissent la direction cherchée sont fournies par l'équation

$$b = a \operatorname{tg} \alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

qu'on ramène immédiatement à l'équation du second degré en $\operatorname{tg} \alpha$

$$(8) \qquad ga^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2av_0^2 \operatorname{tg} \alpha + ga^2 + 2bv_0^2 = 0.$$

Parabole de sûreté. — Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut que la condition

$$(9) \qquad v_0^4 - g[ga^2 + 2bv_0^2] > 0$$

soit remplie ; or, si l'on y regarde a et b comme des coordonnées courantes, le premier membre de cette inégalité égalé à zéro représente une parabole dont le sommet, situé sur l'axe des y a pour ordonnée $\frac{v_0^2}{2g}$, dont le foyer est l'origine et dont par suite le paramètre est $\frac{v_0^2}{g}$. L'inégalité signifie alors que le point donné doit être situé à l'intérieur de la parabole représentée par l'équation

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2 y) = 0.$$

Cette parabole est appelée *parabole de sûreté*.

Elle est évidemment l'enveloppe des trajectoires quand on fait varier l'angle α, en laissant la vitesse initiale constante, et quand le point est sur la parabole de sûreté l'équation (8) a ses racines égales, de sorte qu'il y a une seule trajectoire passant par le point donné (a, b). Il y en a deux quand ce point est à l'intérieur de la parabole de sûreté, et il n'y en a aucune dans le cas contraire.

Lorsque le point est à l'intérieur de la parabole de sûreté, chacune des deux trajectoires qui passent par ce point peut le rencontrer soit en montant soit en descendant. Pour distinguer ces deux cas l'un de l'autre il suffit de comparer l'abscisse a du point donné à celle du sommet de la trajectoire et qui est donnée par la première équation (7).

Soit a' l'abscisse du sommet ; si l'on a $a' < a$, la rencontre a lieu en descendant ; dans le cas contraire, la rencontre a lieu en montant.

Formons donc l'équation du second degré dont les racines sont les abscisses des sommets des deux trajectoires qui passent par le point donné (a, b). Il suffit, pour cela, d'éliminer α entre l'équation (8) et la première équation (7). Or, la première équation (7) peut s'écrire

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g},$$

et l'équation (8) donne

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{2v_0^2(a\,\text{tg}\,\alpha - b)}{ga^2}.$$

On en déduit $\sin 2\alpha = \dfrac{ga^2 \operatorname{tg} \alpha}{v_0^2(a \operatorname{tg} \alpha - b)}$,

et $$x = \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{2(a \operatorname{tg} \alpha - b)}.$$

Cette équation permet de calculer $tg\,\alpha$ en fonction de x et donne

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2bx}{a(2x - a)}.$$

Pour avoir l'équation cherchée, il suffit maintenant de porter cette valeur de $tg\,\alpha$ dans l'expression de $1 + tg^2\,\alpha$. On obtient ainsi successivement

$$1 + \frac{4b^2x^2}{a^2(2x - a)^2} = \frac{2v_0^2}{ga^2}\left[\frac{2abx}{a(2x - a)} - b\right],$$

$$a^2(2x - a)^2 + 4b^2x^2 = \frac{2abv_0^2}{g}(2x - a)$$

et, finalement,

$$(10) \quad 4(a^2 + b^2)x^2 - 4a\left(a^2 + \frac{bv_0^2}{g}\right)x + a^2\left(a^2 + \frac{2bv_0^2}{g}\right) = 0.$$

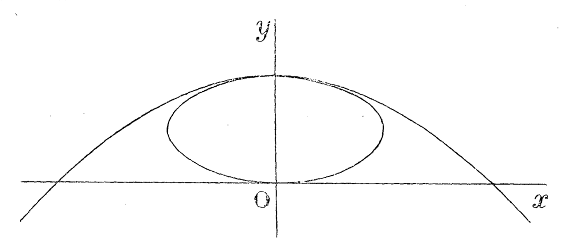
On s'assure sans peine que cette équation (10) a ses racines réelles lorsque l'inégalité (9) est satisfaite, c'est-à-dire lorsque le point (a, b) est intérieur à la parabole de sûreté. Il nous reste alors à comparer a aux racines de cette équation, supposées réelles. Pour cela, remplaçons x par a dans l'équation (10) et étudions le signe du résultat de la substitution. On voit facilement que ce signe est le même que celui de l'expression $R = a^2 + 4b^2 - \dfrac{2bv_0^2}{g}$. Remplaçons dans cette expression a par x, b par y et égalons à zéro; nous obtenons ainsi l'équation d'une ellipse,

$$(11) \quad x^2 + 4y^2 - \frac{2v_0^2}{g}y = 0,$$

qui passe à l'origine, qui admet l'axe des x pour tangente en ce point, dont l'axe des y est un axe de symétrie et dont, par suite, deux sommets sont : l'origine et le point de Oy qui a pour ordonnée

$$y_1 = \frac{v_0^2}{2g},$$

obtenue en faisant $x = 0$ dans l'équation (11), c'est-à-dire le sommet de la parabole de sûreté ; de sorte que la parabole et l'ellipse occupent les positions relatives indiquées par la figure ci-dessous. Si le point (a, b) est intérieur à cette ellipse, le résultat R de la substitution est négatif; il est positif dans le cas contraire.



Dans le premier cas une seule racine de l'équation (10) est plus petite que a, car le coefficient de x^2 dans cette équation est positif; donc le point sera rencontré en montant, par une trajectoire, et en descendant par l'autre.

Dans le second cas les deux racines de l'équation (10) sont ou toutes deux inférieures à a, ou toutes deux supérieures à a. En exprimant que a est supérieur à la demi-somme des racines, on a

$$a^2 + 2b^2 - \frac{bv_0^2}{g} > 0.$$

Mais cette inégalité peut aussi s'écrire

$$2a^2 + 4b^2 - \frac{2bv_0^2}{g} > 0$$

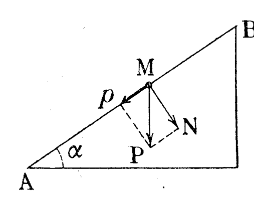
ou encore

$$a^2 + a^2 + 4b^2 - \frac{2bv_0^2}{g} > 0.$$

Sous cette forme il est clair qu'elle est une conséquence de l'hypothèse $R > 0$; donc les racines de l'équation (10) sont toutes deux inférieures à a et les deux trajectoires rencontrent le point en descendant. Ainsi, si le point est compris entre l'ellipse et la parabole de sûreté, il est rencontré les deux fois en descendant.

292. **Problème V.** — *Mouvement d'un point matériel pesant sur un plan incliné, en négligeant le frottement et la résistance de l'air.*

Proposons-nous enfin, comme dernier problème, d'étudier le mouvement d'un point matériel pesant sur un plan incliné faisant l'angle α avec l'horizon. Soit AB la ligne de plus grande pente du plan incliné et soit P le poids du point matériel de masse m. On peut décomposer le poids P en deux forces : N, dirigée suivant la normale et détruite par la résistance du plan, et p, dirigée suivant la ligne de plus grande pente. C'est cette dernière force qui produit le mouvement, et elle est égale à $P \sin \alpha$; comme elle est constante, le mouvement est uniformément varié, si l'on suppose bien entendu que la vitesse initiale soit nulle ou dirigée suivant AB.



L'accélération du mouvement est égale à $\frac{p}{m}$ ou à $\frac{P}{m} \sin \alpha$; mais on a $\frac{P}{m} = g$; donc l'accélération γ du mouvement est égale à $g \sin \alpha$. Si donc on suppose l'espace parcouru positif de B vers A, les formules du mouvement sont

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha,$$

$$v = v_0 + g t \sin \alpha.$$

On voit par là que l'emploi du plan incliné permet de diminuer l'accélération du mouvement sans changer la nature de celui-ci.

Supposons que le mobile parte du point B sans vitesse initiale et comptons x à partir de ce point. Les deux formules précédentes deviennent alors

$$x = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha,$$

$$v = g t \sin \alpha,$$

et, si l'on élimine le temps, elles donnent

$$v^2 = 2 g x \sin \alpha.$$

Supposons que l'espace parcouru soit égal à BA et appelons h le côté BC du triangle rectangle ABC, c'est-à-dire ce qu'on est convenu d'appeler la *hauteur* du plan incliné. On a alors

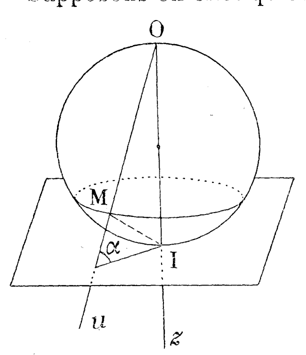
$$h = \text{AB} \sin \alpha,$$

et l'expression du carré de la vitesse devient

$$v^2 = 2gh.$$

Il suit de là que la vitesse au point A est indépendante de l'inclinaison du plan et ne dépend que de sa hauteur. Cela revient à dire, évidemment, que si on laisse tomber du même point O plusieurs points pesants, sans vitesse initiale, tous ces points ont la même vitesse quand ils arrivent sur le même plan horizontal, en suivant des droites différentes OA, OB, OC, ... Ils ne mettent pas le même temps pour descendre le long de ces droites, et il est aisé de prouver que leur lieu géométrique, au même instant, est une sphère ayant un diamètre vertical et passant par le point O.

Supposons en effet qu'on en laisse d'abord tomber un suivant la verticale Oz ; au bout du temps t il aura parcouru un chemin $\text{OI} = \frac{1}{2}gt^2$, puisque la vitesse initiale est nulle. Imaginons maintenant qu'on en laisse tomber un autre, sans vitesse initiale également, suivant une droite Ou faisant l'angle α avec l'horizon ; l'espace parcouru par cet autre mobile sera maintenant $\text{OM} = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha$ ou $\text{OI} \sin \alpha$; ce qui montre que le point M n'est autre chose que la projection du point I sur Ou et, par conséquent, que le point M est sur la sphère de diamètre OI.



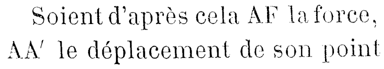
CHAPITRE IV

TRAVAIL ET FORCE VIVE

293. **Notion du travail des forces.** — Lorsqu'on élève un fardeau, on travaille ; on admet que le travail accompli est proportionnel au poids et à l'élévation du fardeau, par suite proportionnel au produit de ces éléments. Si, pour faciliter le travail, au lieu d'élever verticalement le fardeau, on l'élève à la même hauteur sur un plan incliné, *on admet* que le travail ne change pas. De même dans tous les travaux de manœuvre où des éléments étrangers, intelligence, insalubrité, etc. n'interviennent pas, on paye le travail proportionnellement au produit de la force surmontée par le chemin parcouru dans la direction de cette force.

De là la définition suivante :

294. **Définition du travail.** — *On appelle travail d'une force constante en grandeur et en direction la valeur algébrique du produit de cette force par la projection, sur sa direction, du déplacement de son point d'application.*

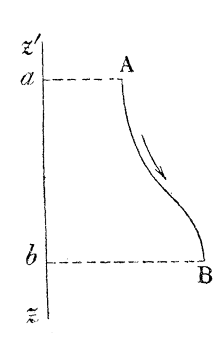


Soient d'après cela AF la force, AA′ le déplacement de son point d'application et a' la projection de A′ sur la direction de la force ; on aura

$$\text{Travail } F = AF.Aa'.$$

Le produit $AF.Aa'$ est d'ailleurs positif ou négatif selon que les vecteurs AF et Aa' sont de même sens ou de sens contraires. Dans le premier cas le travail est dit *moteur* ; il est dit *résistant* dans le second.

295. Exemple. — Considérons un point matériel pesant, de poids P ; soient AB la trajectoire, $z'z$ la direction de la pesanteur, que nous prendrons comme direction positive des projections sur la verticale. Si le point matériel descend depuis le point A jusqu'au point B, la projection du chemin parcouru peut être représentée en grandeur et sens par le vecteur ab ; le travail sera donc égal à P $\times$ vecteur ab. Ici le vecteur ab est égal à la distance verticale des points A et B ; mais si le mobile, au lieu d'avoir un mouvement descendant, avait un mouvement ascendant, le vecteur ab serait égal à cette même distance précédée du signe —.



Ainsi, le travail de la pesanteur est égal au poids multiplié par la distance verticale positive ou négative du point de départ du mobile au point d'arrivée.

296. **Unités de travail.** — D'après cela, si P est le poids d'un point matériel et h la distance verticale positive ou négative du point de départ au point d'arrivée, et si l'on désigne par $\mathfrak{T}r.P$ le travail du poids P, on a

$$\mathfrak{T}r.P = P.h.$$

Si dans cette formule on fait $P = 1$, $h = 1$, il vient

$$\mathfrak{T}r.P = 1.$$

Si donc on prend pour unité de force le kilogramme et pour unité de longueur le mètre, l'unité de travail est le travail de la pesanteur dans la chute de 1 mètre du poids de 1 kilogramme, ou, ce qui revient au même, le travail qu'il faut dépenser pour élever de 1 mètre le poids de 1 kilogramme. Ce travail porte le nom de *kilogrammètre*, rappelant les unités, kilogramme et mètre. Par exemple, si $P = 3$ kg et $h = 4$ m, on a

$$\mathfrak{T}r.P = 12 \text{ kilogrammètres.}$$

Dans le système C. G. S. l'unité de travail sera, naturellement, le travail de l'unité de force pour un déplacement égal

à l'unité de longueur, c'est-à-dire le travail d'une dyne pour un déplacement d'un centimètre. On l'appelle l'*erg*.

297. **Évaluation du kilogrammètre en ergs.** — Comme exercice, proposons-nous d'évaluer le kilogrammètre en ergs. Le poids d'un gramme-masse est 980,96 dynes ou

$$9,8096 \times 10^2 \text{ dynes ;}$$

le poids du kilogrammètre est donc

$$9,8096 \times 10^5 \text{ dynes.}$$

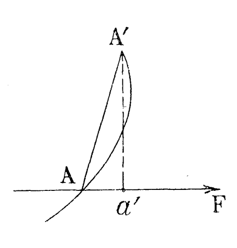
L'unité étant le centimètre, pour avoir la valeur du kilogrammètre en ergs, il faudra multiplier par 100 le poids exprimé en dynes, ce qui donne

$$9,8096 \times 10^7 \text{ ergs.}$$

On appelle *megerg* une unité secondaire de travail équivalente à 1 000 000 d'ergs.

On voit donc que le kilogrammètre vaut environ 100 megergs.

298. **Expression algébrique du travail d'une force constante.** — Nous avons vu que si AA′ est le déplacement d'un point matériel sous l'action d'une force F, constante en grandeur et en direction, on a



$$\mathfrak{T}r.F = F \times Aa',$$

Aa′ désignant la projection de AA′ sur la direction de la force. Or, on a évidemment

$$Aa' = AA' \cos(AA', F) ;$$

donc

$$\mathfrak{T}r.F = F.AA'. \cos(AA', F),$$

ce qui conduit à la nouvelle définition suivante du travail d'une force :

On appelle travail d'une force constante en grandeur et en direction, le produit de la force par la corde du chemin parcouru et par le cosinus de leur angle.

Mais on peut encore écrire

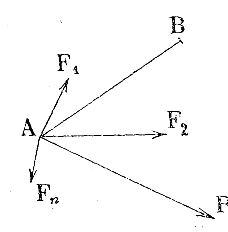
$$\mathfrak{T}r.F = AA'.F \cos(AA', F),$$

c'est-à-dire $\mathfrak{T}r.F = AA'$. proj. de F sur AA'.

Il en résulte que l'on peut appeler travail d'une force constante en grandeur et en direction, *le produit de la corde du chemin parcouru par la projection de la force sur cette corde.*

De ces diverses définitions, il suit que le travail est nul, soit lorsque la force est nulle, soit lorsque la direction de la force est normale à la corde du déplacement.

299. **Travail de la résultante de plusieurs forces concourantes. — Théorème.** — *Lorsque plusieurs forces constantes en grandeur et en direction sont appliquées au même point matériel, le travail de leur résultante pour un déplacement quelconque est égal à la somme algébrique des travaux des composantes pour le même déplacement.*



Soit en effet $F_1, F_2, \ldots, F_n$ un système de forces constantes en grandeur et en direction, agissant sur le même point matériel A et communiquant à ce point un déplacement quelconque de corde AB ; soit R la résultante de ces forces. Il s'agit de prouver que

$$\mathfrak{T}r.\,R = \Sigma\,\mathfrak{T}r.\,F_i,$$

c'est-à-dire que

$$AB \times \text{proj. } R \quad \text{sur} \quad AB = \Sigma AB \times \text{proj. } F_i \quad \text{sur} \quad AB.$$

Mais AB est en facteur dans la somme qui figure au second membre ; comme il est aussi en facteur dans le premier, on peut le supprimer de part et d'autre, et il reste à prouver qu'en projetant sur AB on a

$$\text{proj. } R = \Sigma \text{ proj. } F_i,$$

c'est-à-dire que la projection de la résultante est égale à la somme des projections des composantes. Mais ceci résulte de ce que la résultante est la somme géométrique des composantes, et du théorème des projections.

300. **Travail de la pesanteur dans le mouvement d'un corps pesant.** — Nous considérerons un corps pesant de poids P comme un ensemble de points matériels pesants, et nous

allons montrer que *le travail de la pesanteur sur un système de points matériels qui subit un déplacement, est égal au poids total supposé appliqué au centre de gravité du système.*

Pour cela, appelons z_1, z_2, ... les cotes positives ou négatives des points du système, par rapport à un plan horizontal H, dans la position initiale du corps ; appelons de même Z_1, Z_2, ... leurs cotes, par rapport au même plan H, dans une deuxième position du corps. Le travail de la pesanteur sur un point quelconque du système, de poids p_i, quand le système passe de la première à la deuxième position, pour lesquelles les cotes respectives du point sont z_i et Z_i, est

$$p_i(z_i - Z_i).$$

Si donc on appelle T la somme de tous les travaux analogues, on a

$$T = \Sigma p_i(z_i - Z_i),$$

c'est-à-dire

$$T = \Sigma p_i z_i - \Sigma p_i Z_i,$$

le signe Σ s'étendant d'ailleurs à tous les points du système.

Or, soient z et Z les cotes, par rapport au plan H, du centre de gravité du système dans la première et dans la deuxième position ; en vertu du théorème des moments des forces parallèles par rapport à un plan, on a

$$\Sigma p_i z_i = Pz,$$

$$\Sigma p_i Z_i = PZ.$$

Il en résulte

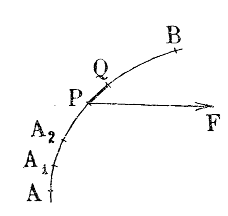
$$\Sigma p_i z_i - \Sigma p_i Z_i = P(z - Z),$$

c'est-à-dire

$$T = P(z - Z),$$

ce qui démontre la proposition.

301. **Extension aux forces variables de la notion du travail ; travail élémentaire.** — Supposons qu'un point matériel soit en mouvement sous l'action d'une force variable en grandeur et en direction ; soit AB un déplacement quelconque de ce point. Partageons AB en parties infiniment petites AA_1, A_1A_2, ..., qu'on peut considérer comme confondues avec leurs cordes respectives ; on peut admettre que, pendant que le point parcourt l'une quelconque de ces parties, la force demeure constante en grandeur et en direction. Soit



alors F la force quand le point parcourt l'une quelconque de ces parties PQ ; on aura, pour ce déplacement,

$$\mathfrak{T}r. \; F = F.PQ. \cos (F, PQ) :$$

ce travail s'appelle le *travail élémentaire* de la force variable pour le déplacement infiniment petit PQ.

A chaque élément analogue à PQ il correspond ainsi un travail élémentaire qui tend vers zéro en même temps que PQ ; on appelle *travail total* de la force variable pour le déplacement AB la limite de la somme algébrique de ses travaux élémentaires correspondant aux divers éléments infiniment petits en lesquels l'arc AB a été partagé. On prouvera plus loin (306) que cette somme tend vers une limite ; pour le moment nous l'admettrons.

302. Remarques. — 1° L'expression du travail élémentaire peut encore se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$F. \text{ proj. } PQ \text{ sur } F,$$

$$PQ. \text{ proj. } F \text{ sur } PQ,$$

que l'on énonce facilement en langage ordinaire.

2° Le travail élémentaire est nul, soit quand la force est nulle, soit quand sa direction est normale au déplacement.

303. **Applications.** — 1° Supposons d'abord que la force soit constante en grandeur et en direction et appelons T son travail total pour le déplacement AB, et considéré comme somme des travaux élémentaires ; on aura

$$T = \Sigma F. \text{proj. } PQ \quad \text{sur} \quad F.$$

Mais F étant constante, on peut la mettre en facteur dans le second membre, et l'on a

$$T = F. \Sigma \text{ proj. } PQ \quad \text{sur} \quad F.$$

Or, $\Sigma \text{ proj. } PQ \quad \text{sur} \quad F = \text{proj. } AB \text{ sur } F ;$

donc $T = F. \text{proj. } AB \quad \text{sur} \quad F.$

Nous retrouvons ainsi, comme cela était à prévoir, la définition de laquelle nous sommes partis.

2° Supposons en second lieu que la force soit constante en



grandeur et reste constamment tangente à la trajectoire ; alors proj. PQ sur F est égale à PQ et, en mettant encore F en facteur dans la somme, on a

$$T = F.\Sigma PQ = F.AB.$$

Dans ce cas le travail total est donc égal au produit de la force par le chemin parcouru par son point d'application.

3° Supposons enfin que la force soit constante en grandeur mais fasse un angle constant avec la tangente à la trajectoire ; en raisonnant comme dans les cas précédents et en appelant α cet angle, on verra facilement que le travail total est égal au produit de la force par le chemin parcouru et par cos α.

304. **Théorème.** — *Le travail total de la résultante d'un système de forces appliquées à un point matériel, et pour un déplacement quelconque de ce point, est égal à la somme algébrique des travaux des composantes pour le même déplacement.*

La démonstration rigoureuse de cette proposition exigerait des développements qui ne seraient pas à leur place ici ; nous nous contenterons donc de l'avoir énoncée.

305. **Définition de la force vive.** — On appelle *force vive*, à un instant donné, d'un point matériel en mouvement, la moitié du produit de la masse par le carré de la vitesse à cet instant. Si m est la masse du point et v sa vitesse à l'instant considéré, l'expression de la force vive est $\frac{1}{2} mv^2$.

306. **Théorème des forces vives.** — *La variation de la force vive d'un point matériel, pendant un temps quelconque, est égale à la somme des travaux des forces qui agissent sur ce point, pendant le même temps.*

Le travail de la résultante d'un système de forces appliquées au même point matériel étant égal à la somme des travaux des composantes, il suffira de démontrer la proposition dans le cas où le point n'est soumis qu'à l'action d'une seule force.

Nous distinguerons d'ailleurs trois cas :

1° *La force est constante en grandeur et en direction et le déplacement a la même direction que la force.* — Dans ce cas le

mouvement est uniformément varié, et si l'on appelle respectivement x, v_0 et γ l'espace parcouru pendant le temps t, la vitesse initiale et l'accélération, on a

$$(1) \qquad x = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2.$$

D'autre part, si l'on appelle m la masse du point matériel, F la force qui agit sur ce point et v la vitesse à l'instant t, on a

$$(2) \qquad F = m\gamma,$$
$$v = v_0 + \gamma t.$$

Pour qu'il y ait égalité entre la variation de force vive de l'instant zéro à l'instant t et le travail accompli pendant le temps t, il faut que l'on ait

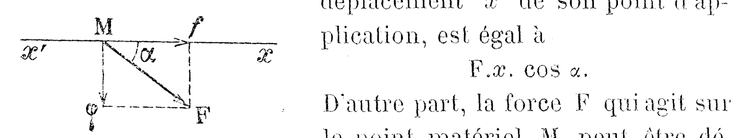
$$m\gamma x = \frac{1}{2} m(v_0 + \gamma t)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2,$$

c'est-à-dire

$$v_0\gamma t + \frac{1}{2}\gamma^2 t^2 = \frac{1}{2}[v_0^2 + 2v_0\gamma t + \gamma^2 t^2 - v_0^2],$$

ce qui est évident.

2° *La force est constante en grandeur et en direction, mais fait un angle α avec la direction du déplacement supposé rectiligne.* — Dans ce cas le travail accompli par une force F, pour un déplacement x de son point d'application, est égal à



$$F.x. \cos \alpha.$$

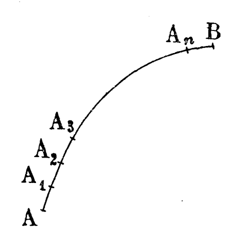
D'autre part, la force F qui agit sur le point matériel M peut être décomposée en deux : l'une, f, dirigée suivant la trajectoire $x'x$ et l'autre, φ, normale à la trajectoire. La force f est la seule qui produise le mouvement, car la force φ est détruite par la résistance de la ligne $x'x$ sur laquelle le mobile est assujetti à rester; mais on a

$$f = F \cos \alpha,$$

de sorte que la force f est constante et communique au point un mouvement uniformément varié. Enfin l'expression du travail de la force F montre que ce travail est le même que celui de la force f; par conséquent nous sommes ramenés à prouver que la variation de la force vive du point M, qui se déplace

dans la direction de la force f, sous l'action de cette force, est égale au travail accompli par la force f, ce qui a été prouvé dans le premier cas.

3° *La force est quelconque ainsi que le déplacement.* — Soit AB le déplacement du point d'application pendant le temps t, de l'instant zéro à l'instant t, par exemple. Appelons v_0 la vitesse au point A, v la vitesse au point B et m la masse du point ; puis partageons l'arc AB en n parties, AA_1, A_1A_2, ... assez petites pour qu'on puisse les considérer comme confondues avec les cordes correspondantes et pour que l'on puisse, en outre, considérer la force comme constante, pendant que son point d'application parcourt l'une quelconque de ces parties. Appelons $v_1, v_2, \ldots, v_n$ les vitesses respectives du mobile aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de sa trajectoire et T_0, $T_1, \ldots, T_n$ les travaux élémentaires pour les déplacements respectifs $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nB$. Puisque nous supposons la force constante pendant que le point matériel parcourt l'arc AA_1, et puisque nous supposons de plus l'arc AA_1 confondu avec sa corde, on a, en vertu du second cas,



$$T_0 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Mais on a aussi, pour les mêmes raisons,

$$T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$T_n = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_n^2}{2}.$$

Si donc on appelle T le travail total, c'est-à-dire la somme $T_0 + T_1 + \cdots + T_n$, et si l'on ajoute ces égalités membre à membre, on a, après réduction,

$$T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

ce qui démontre la proposition et ce qui prouve, en même temps, que la somme des travaux élémentaires a une limite égale à $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$.

307. **Enoncé du théorème général des forces vives.** — La proposition précédente, que nous avons démontrée pour une force, n'est qu'un cas particulier d'une loi plus générale que nous ne pouvons démontrer ici et qu'on peut énoncer de la manière suivante :

Lorsque des forces en nombre quelconque agissent sur un système de points matériels, la variation de la somme des forces vives de tous les points du système pendant un certain temps, est égale à la somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur les points du système pendant le même temps.

C'est en cela que consiste le théorème général des forces vives. Nous nous bornerons à l'avoir énoncé et à remarquer que, si on l'applique à un corps gêné, il n'est pas nécessaire d'introduire les forces de réaction, parce que la somme des travaux de ces forces est évidemment nulle. En effet, à toute force de réaction R appliquée en un point A, il correspond une force R′ égale et opposée à R, appliquée au même point ; par conséquent pour un déplacement du point A, les deux forces R et R′ donnent deux travaux égaux et de signes contraires, et dont, par suite, la somme est nulle.

308. **Application I.** — Supposons qu'un point matériel pesant de poids p soit lancé de bas en haut, sur la verticale d'un point A, avec une vitesse initiale v_0. Soient A le point de départ et M le point le plus élevé de sa course. Le travail accompli pour aller de A en M et pour revenir de M en A est nul, puisque le point de départ et le point d'arrivée sont confondus ; si donc v est la vitesse du mobile quand il revient au point A, on a, d'après le théorème des forces vives,

M

A

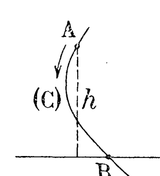
$$\frac{mv^2 - mv_0^2}{2} = 0,$$

c'est-à-dire $v^2 = v_0^2$

et $v = \pm v_0,$

c'est-à-dire enfin $v = -v_0.$

309. **Application II.** — Supposons qu'un point matériel de poids p se déplace, sous l'action de son poids, sur une courbe (C), depuis le point A jusqu'au point B. Appelons v_0 la vitesse au point A, v la vitesse au point B, m la masse du point et h la distance verticale des deux points A et B. Le travail accompli par le poids p, pour aller de A en B, est égal à ph ; par conséquent l'application du théorème des forces vives donne



$$\frac{1}{2}(mv^2 - mv_0^2) = ph.$$

Mais on a $p = mg$;

donc, après réduction,

$$v^2 - v_0^2 = 2gh.$$

Si en particulier $v_0 = 0$, on a

$$v = \sqrt{2gh},$$

et nous retrouvons ainsi un résultat plus général que celui qui a été obtenu dans le cas particulier du plan incliné et que nous avons énoncé ainsi :

Si des mobiles pesants descendent sans vitesse initiale le long de différents plans inclinés issus du même point, les vitesses qu'ils possèdent quand ils arrivent sur le même plan horizontal sont toutes égales à $\sqrt{2gh}$, h désignant la distance verticale du point de départ au plan horizontal considéré.

310. **Application III.** — *Un projectile de poids p acquiert, au sortir d'une arme à feu de longueur l, une vitesse v : on demande la force de la poudre, en supposant qu'elle agisse d'une manière constante pendant que le projectile reste dans l'arme.*

Soit F la force cherchée et sous l'action de laquelle le projectile parcourt la longueur l. Le travail accompli par la force F pour ce déplacement est égal à $F.l$; d'autre part, la vitesse initiale étant nulle, le travail est égal à la force vive au

sortir de l'arme, c'est-à-dire à $\frac{mv^2}{2}$. On a donc, d'après le théorème des forces vives,

$$F.l = \frac{mv^2}{2};$$

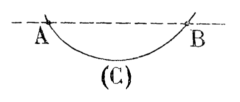
mais $m = \frac{p}{g}$; donc

$$Fl = \frac{pv^2}{2g}$$

et

$$F = \frac{pv^2}{2gl}.$$

311. Pendule simple; durée d'une petite oscillation. — Comme dernière application, supposons qu'un point matériel pesant, assujetti à rester sur une courbe (C), soit abandonné à lui-même, c'est-à-dire sans vitesse initiale, en un point A;



il remontera jusqu'au point B sur le même plan horizontal que le point A.

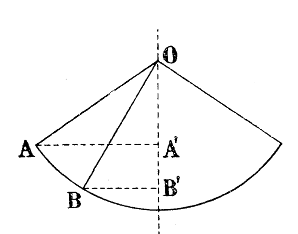
En effet, il ne s'arrête que lorsque la vitesse devient nulle; or, si l'on appelle h la distance verticale du point de départ au point d'arrivée, on a $v = \sqrt{2gh}$; si donc $v = 0$, on a $h = 0$.

C'est ce qui arrive dans le cas du pendule simple. Dans ce cas la courbe (C) est un arc de cercle ayant pour centre le point de suspension du pendule et dont le rayon est égal à la longueur l du pendule. Le résultat que nous venons d'obtenir signifie alors que les oscillations ont la même amplitude de part et d'autre de la verticale du point de suspension.

Proposons-nous de calculer la durée d'une petite oscillation. Pour cela, appelons A la position initiale du pendule correspondant à l'angle d'écart α_0, et B une position quelconque définie par l'angle d'écart α. Si l'on appelle h la distance verticale des deux points A et B (A'B' sur la figure ci-après), la vitesse au point B est donnée par la formule

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Or, les deux triangles rectangles OAA' et OBB' donnent



$$OA' = l \cos \alpha_0, \quad OB' = l \cos \alpha ;$$

on en déduit

$$OB' - OA' = h = l(\cos \alpha - \cos \alpha_0)$$

et, par suite,

$$v = \sqrt{2gl(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}.$$

Lorsque les angles d'écart sont très petits, on peut poser

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\cos \alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{2},$$

ce qui permet d'écrire

$$(1) \qquad v = \sqrt{gl(\alpha_0^2 - \alpha^2)}.$$

Pour déduire de là la durée d'une petite oscillation, nous rappellerons que si un corps de masse m se déplace sur une droite sous l'action d'une force attractive proportionnelle à la distance, et parcourt un chemin à partir du point où sa vitesse est nulle, on a (284)

$$(2) \qquad x = a \cos t\sqrt{k},$$

en supposant que la force soit égale à $-mkx$, que x désigne l'abscisse du mobile à l'instant t et enfin que a soit son abscisse à l'instant où sa vitesse est nulle. Il en résulte que la vitese à l'instant t est donnée par la formule

$$v = -a\sqrt{k} \sin t\sqrt{k},$$

et l'on en déduit successivement

$$v^2 = a^2k \sin^2 t\sqrt{k} = a^2k\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

$$v^2 = k(a^2 - x^2).$$

Cette formule devient identique à la formule (1) si l'on pose dans celle-ci

$$l^2\alpha_0^2 = a^2, \qquad l^2\alpha^2 = x^2, \qquad k = \frac{g}{l}.$$

Mais dans le mouvement défini par l'équation (2), la durée d'une oscillation est $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$; donc la durée d'une petite oscillation du pendule simple est

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

CHAPITRE V

MACHINES A L'ÉTAT DE MOUVEMENT

312. Nous avons appelé *machine* un corps ou un ensemble de corps gênés, destinés à vaincre une résistance ou à produire un mouvement. Pour que les machines puissent vaincre des résistances, il faut qu'elles en déplacent les points d'application, par suite qu'elles effectuent un travail produit par l'action d'une force motrice ou puissance.

On peut dire, d'après cela, que les machines servent à transmettre le travail de la puissance, et nous nous proposons d'indiquer la loi de la transmission de ce travail.

313. **Principe de la transmission du travail dans les machines; forces motrices et forces résistantes.** — Nous avons vu que la somme des travaux accomplis, pendant un certain temps, par les forces qui agissent sur tous les points d'un système en mouvement, est égale à la variation de la somme des forces vives de tous les points du système, pendant le même temps. Ce principe est exprimé par l'égalité

$$\sum \mathfrak{Tr}.\ \mathrm{F} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2},$$

F désignant une force quelconque, v_0 et v les vitesses d'un point quelconque du système au commencement et à la fin de l'intervalle de temps pendant lequel on le considère.

Les forces qui agissent sur un système matériel en mouvement sont de deux espèces : les unes exercent leur action dans le sens même où se déplace leur point d'application, les autres en sens contraire. Pour les premières, le travail est positif ou *moteur*; pour les deuxièmes, il est négatif ou *résistant*. Pour cette raison ces deux espèces de forces s'appellent respectivement forces *motrices* et forces *résistantes*, et la somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur une machine

est égale à la différence entre la somme des travaux des forces motrices ou travail moteur, et la somme des travaux des forces résistantes ou travail résistant. Si donc on désigne par T_m le travail moteur et par T_r le travail résistant, on aura

$$T_m - T_r = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \tag{1}$$

Supposons que le mouvement de la machine soit uniforme ; alors le second membre de l'équation (1) étant nul, il en sera de même du premier, et l'on pourra dire que *le travail moteur est égal au travail résistant.*

Considérons, par exemple, le cas simple d'une machine soumise seulement à deux forces : une puissance P et une résistance R. Supposons que ces deux forces soient constantes et appelons p et r les projections sur leurs directions des déplacements respectifs de leurs points d'application ; supposons enfin que la machine se meuve d'un mouvement uniforme de manière qu'il y ait égalité entre le travail moteur et le travail résistant. On aura

$$Pp = Rr$$

ou bien

$$\frac{P}{R} = \frac{r}{p},$$

ce qui signifie que le rapport des deux forces doit être égal au rapport inverse des projections, sur leurs directions, des chemins parcourus respectivement par leurs points d'application. Si, par exemple, la résistance est cent fois plus grande, la projection du chemin parcouru est cent fois plus petite, ce que l'on exprime en disant que *ce que l'on gagne en force, on le perd en chemin parcouru ou en vitesse*. Inversement, si r devient cent fois plus grand, R devient cent fois plus petit, P et p conservant bien entendu des valeurs telles que Pp demeure constant ; de sorte que *ce que l'on gagne en chemin parcouru, on le perd en force.*

Une machine n'a généralement pas un mouvement uniforme, mais reprend la même vitesse après des intervalles de temps égaux entre eux. On dit alors que le mouvement est *périodique*, et l'on appelle *période* l'intervalle de temps qui

s'écoule entre deux retours consécutifs de la machine à la même vitesse. Si l'on considère la machine pendant toute la durée d'une période, on aura bien l'égalité

$$T_m = T_r$$

entre le travail moteur et le travail résistant ; mais cette égalité n'a pas lieu à tous les instants de la période. Le mouvement comprend deux phases : pendant la première, la vitesse va en croissant et le travail moteur est plus grand que le travail résistant, de sorte qu'une partie du travail moteur se transforme en force vive ; pendant la seconde, la vitesse diminue, le second membre de l'équation (1) devient négatif et le travail moteur est inférieur au travail résistant. La force vive amassée pendant la première phase est dépensée à effectuer l'excès du travail résistant sur le travail moteur, de manière qu'il y ait égalité entre les deux espèces de travaux, à la fin de la période.

C'est en cela que consiste le principe de la transmission du travail dans les machines, et nous pouvons l'énoncer ainsi :

1° *Dans toute machine en mouvement uniforme, le travail moteur est constamment égal au travail résistant ;*

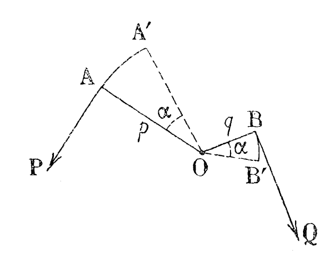
2° *Dans toute machine en mouvement périodique, le travail moteur, pendant toute la durée de la période, est égal au travail résistant pendant le même temps.*

Les réciproques sont évidemment vraies.

Ajoutons que dans l'application de ce principe, et pour des raisons déjà données numéro 307, il est inutile de tenir compte des travaux des forces de réaction.

314. **Vérification du principe de la transmission du travail dans les machines simples.** — Le principe de la transmission du travail dans les machines est le plus important de la mécanique pratique. Nous allons nous proposer de le vérifier directement pour les machines simples étudiées en Statique, en supposant que les forces qui agissent sur la machine se font équilibre, c'est-à-dire en supposant que le mouvement de la machine soit uniforme.

1° *Levier.* — Appelons P la puissance, Q la résistance, p et q les bras de levier respectifs; nous avons vu que la condition d'équilibre est



$$(1) \qquad Pp = Qq.$$

D'autre part, si AA' et BB' sont les arcs de cercle décrits par les points d'application A et B de la puissance et de la résistance, comme ces forces sont tangentes aux déplacements correspondants, le travail moteur est égal à $P \times AA'$ et le travail résistant à $Q \times BB'$. Il faut donc prouver que l'on a

$$(2) \qquad P \times AA' = Q \times BB'.$$

Or, si l'on appelle α l'angle dont le levier a tourné, on a

$$AA' = p\alpha, \qquad BB' = q\alpha.$$

Il s'agit donc de prouver que

$$Pp\alpha = Qq\alpha,$$

ce qui est une conséquence de l'équation (1).

2° *Poulie fixe.* — En appelant P la puissance et Q la résistance, l'équation d'équilibre est

$$P = Q.$$

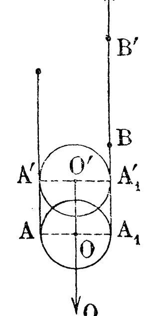
Comme le déplacement du point d'application de la puissance est évidemment de même longueur que celui du point d'application de la résistance, comme de plus les directions de ces déplacements sont les mêmes que celles des forces correspondantes, en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par la valeur absolue du déplacement, on verra tout de suite qu'il y a égalité entre le travail moteur et le travail résistant.

3° *Poulie mobile.* — Supposons que les cordons soient parallèles et que la poulie passe d'une position O à une position O', de sorte que OO' est le déplacement du point d'application de la résistance. Si B et B' sont les positions correspon-

dantes du point d'application de la puissance, on a évidemment

$$BB' = 2OO';$$

car la longueur BB' est équivalente à $AA' + A_1A_1'$. On a donc, en appelant toujours P et Q la puissance et la résistance,



$$T_m = P \times 2OO',$$
$$T_r = Q \times OO'.$$

Mais en vertu de la condition d'équilibre de la poulie mobile, quand les cordons sont parallèles, on a

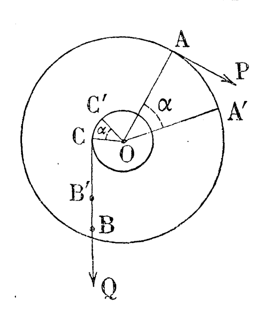
$$Q = 2P,$$

par suite $\quad Q \times OO' = P \times 2OO',$

et enfin $\quad T_m = T_r,$

puisque $Q = 2P$ en vertu de la condition d'équilibre.

4° *Treuil.* — Supposons que, sous l'action de la puissance, l'appareil tourne d'un angle α autour de son axe. Projetons la figure sur un plan perpendiculaire à l'axe du treuil, et appelons r et R les rayons de l'arbre et de la roue. Si AA' et BB' sont les déplacements respectifs du point d'application de la puissance P, et du point d'application de la résistance Q, on a



$$T_m = P \times AA', \qquad T_r = Q \times BB'.$$

Mais on a

$$AA' = R\alpha, \qquad BB' = CC' = r\alpha,$$

C' désignant la position du point C après la rotation ; d'autre part, en vertu de la condition d'équilibre du treuil on a

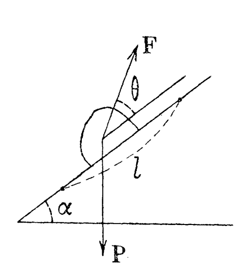
$$PR = Qr.$$

On en déduit $\quad PR\alpha = Qr\alpha,$

c'est-à-dire $\quad P \times AA' = Q \times BB',$

et enfin $\quad T_m = T_r.$

5° *Plan incliné.* — Soit maintenant F la puissance faisant l'angle θ avec la ligne de plus grande pente du plan incliné.



Supposons que, sous l'action de cette force, un corps de poids P ait parcouru un chemin l d'un mouvement uniforme, et appelons α l'angle du plan incliné avec l'horizon. On a alors

$$T_m = Fl \cos \theta, \qquad T_r = Pl \sin \alpha,$$

car le déplacement fait l'angle θ avec la puissance et l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec la résistance. Il faut donc prouver que

$$F \cos \theta = P \sin \alpha,$$

ce qui résulte de la condition d'équilibre (223).

315. Notions sur les résistances passives. — Parmi les résistances qu'une machine doit vaincre, il y a celles pour lesquelles la machine a été spécialement construite, et le travail moteur employé à vaincre ces résistances est un travail *utile*. Mais il y a aussi d'autres résistances qu'on ne peut jamais détruire entièrement et qui absorbent une partie du travail moteur : ce sont les frottements des organes de la machine les uns sur les autres, les vibrations, les chocs, la résistance de l'air, etc. La portion du travail moteur destinée à vaincre ces résistances est perdue pour le but qu'on se propose en établissant la machine : on l'appelle le *travail passif*.

316. Relations générales entre le travail moteur, le travail utile et le travail passif. — D'après cela, nous sommes conduits à considérer le travail résistant comme composé de deux parties : le travail utile et le travail passif. Si donc on appelle T_u le travail utile, T_f le travail passif, l'équation qui exprime le principe de la transmission du travail devient

$$T_m = T_u + T_f.$$

On appelle *rendement* d'une machine le rapport entre le travail utile et le travail moteur. L'équation précédente nous

donne immédiatement, pour le rendement, l'expression

$$\frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m}.$$

Comme cela est évident, le rendement est toujours inférieur à l'unité et s'approche d'autant plus de l'unité que T_f est plus petit, c'est-à-dire que la machine est plus parfaite.

317. **Impossibilité du mouvement perpétuel.** — C'est parce qu'il est impossible d'éviter les résistances passives, qu'il est également impossible de résoudre le problème du mouvement perpétuel. Ce problème consiste en effet à trouver une machine qui, une fois mise en mouvement par une force motrice quelconque, continue à se mouvoir indéfiniment et fournisse toujours un travail utile. Cette machine est irréalisable, car quelque parfaite qu'elle soit, il est impossible d'éviter les frottements des organes, les vibrations et les chocs ; de sorte que le travail utile ne peut jamais être qu'une fraction du travail moteur. Autrement dit, le travail moteur ne peut pas être transformé complètement en travail utile.

Mais il y a plus : quand bien même on voudrait se borner à produire un mouvement indéfini, on se trouverait en présence d'un problème impossible. Car, si dans l'équation des forces vives

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = T_m - T_u - T_f,$$

on suppose T_m et T_u nuls, elle donne

$$\sum \frac{mv^2}{2} = \sum \frac{mv_0^2}{2} - T_f.$$

Or, T_f est une somme de termes tous positifs et qui va en croissant, comme toutes les expériences le démontrent. Il arrivera donc un moment où l'on aura

$$\sum \frac{mv_0^2}{2} - T_f = 0,$$

et, par suite,

$$\sum \frac{mv^2}{2} = 0.$$

A ce moment, tous les points de la machine auront une vitesse nulle, et la machine s'arrêtera.

318. Unité de travail dans les machines. — Le travail produit par une force ou par un système de forces ne dépend que de ces forces et des déplacements de leurs points d'application : il est indépendant, par définition, du temps employé à obtenir ces déplacements. Toutefois il est indispensable, pour connaitre la valeur d'une machine, de pouvoir évaluer le travail qu'elle produit en un temps donné. Il est clair en effet que le mécanisme sera d'autant plus parfait qu'il emploiera moins de temps pour effectuer un travail donné.

On a été ainsi conduit, pour évaluer le travail des machines, à prendre une unité de travail dépendant du temps : cette unité de travail, c'est le *cheval-vapeur*. Lorsqu'une machine produit un travail de 75 kilogrammètres à la seconde, on dit qu'elle est de la force de 1 cheval-vapeur. Le travail d'un cheval ordinaire n'est en général que le cinquième d'un cheval-vapeur.

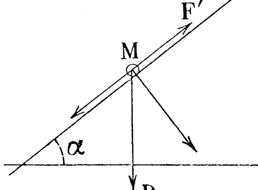
Comme application, proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Une chute d'eau débite 6^{mc} *d'eau à la minute et tombe d'une hauteur de* 5^{m} *sur une roue qui produit un travail ; trouver en chevaux-vapeur le travail moteur de la machine.*

Puisqu'il tombe 6000 litres d'eau en une minute, il en tombera 100 litres en une seconde. La force motrice est donc égale à 100^{kg} et le déplacement de son point d'application est égal à 5^{m}. Il en résulte que le travail produit pendant une seconde est de 500 kilogrammètres, c'est-à-dire de $\frac{500}{75}$ chevaux-vapeur. On trouve 6,66, de sorte que la force de la machine est de 6 chevaux-vapeur, 66 centièmes.

319. Mouvement d'un point sur un plan incliné en tenant compte du frottement. — Pour terminer, proposons-nous d'étudier le mouvement d'un point matériel pesant placé sur un plan incliné, en tenant compte du frottement. Appelons P le poids du point matériel, α l'angle du plan incliné avec le plan horizontal et f le coefficient de frottement. Les

composantes du poids P suivant la ligne de plus grande pente et suivant la normale sont respectivement



$$p = P \sin \alpha,$$
$$N = P \cos \alpha ;$$

d'autre part, la force de frottement est

$$F' = fN = fP \cos \alpha.$$

Par conséquent, si l'on suppose d'abord que le mouvement ait lieu vers le bas, la force qui produit le mouvement et qui est égale à $p - F'$ a pour expression

$$P(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Soit φ l'angle de frottement ; on a

$$f = \operatorname{tg} \varphi,$$

et, en remplaçant dans l'expression précédente, on obtient, pour la force qui produit le mouvement, la nouvelle expression

$$P(\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi) = \frac{P \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

L'accélération du mouvement s'en déduit en divisant par la masse m, et comme $\frac{P}{m} = g$, on voit qu'elle est égale à

$$\frac{g \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Il en résulte que si l'on appelle v_0 la vitesse initiale, les équations du mouvement sont

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} t^2, \\ v = v_0 + g \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} t. \end{cases}$$

Elles montrent que si l'on a $\alpha > \varphi$, le mouvement est uniformément accéléré ; que le mouvement est uniforme si $\alpha = \varphi$, et enfin qu'il est uniformément retardé si $\alpha < \varphi$.

Supposons maintenant que le mouvement ait lieu vers le haut ; alors la force de frottement est dirigée vers le bas et s'ajoute à p ; elle retarde le mouvement, et la force totale qui

s'oppose au mouvement a pour expression

$$p + F' = P \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Il en résulte que les équations du mouvement sont

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} t^2, \\ v &= v_0 - g \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} t, \end{aligned} \right.$$

et que le mouvement est uniformément retardé. Le mobile s'arrête au bout du temps

$$t = \frac{v_0}{g} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)};$$

quand il est au repos, il y reste si l'on a $\alpha \leqslant \varphi$ (227) ; sinon il redescend d'un mouvement uniformément varié donné par les premières formules.

On peut ajouter que les deux mouvements, le mouvement ascendant et le mouvement descendant qui lui succède, ne sont pas symétriques ; par un calcul simple on trouve en effet que la vitesse du mobile quand il repasse par la position initiale n'est plus égale à v_0. Pour cela on fait

$$t = \frac{v_0}{g} \frac{\cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

dans la première formule (2), qui donne alors

$$x = x_0 + \frac{v_0^2}{2g} \frac{\cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}.$$

On porte cette valeur de x dans la première formule (1), après y avoir fait $v_0 = 0$, et l'on en tire

$$t = \frac{v_0 \cos \varphi}{g} \sqrt{\frac{1}{\sin(\alpha - \varphi) \sin(\alpha + \varphi)}};$$

on porte enfin cette valeur de t dans la deuxième formule (1), où l'on a fait aussi $v_0 = 0$, et l'on obtient finalement

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\alpha + \varphi)}}.$$

Comme cas particulier, supposons que le plan, au lieu d'être incliné, soit horizontal ; la force de frottement est alors égale à Pf, l'accélération à gf et le mouvement, qui est uniformément retardé, est défini par les équations

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g f t^2,$$

$$v = v_0 - g f t,$$

v_0 désignant toujours la vitesse initiale. Le mobile s'arrête au bout du temps

$$t = \frac{v_0}{gf}.$$

EXERCICES SUR LE LIVRE III

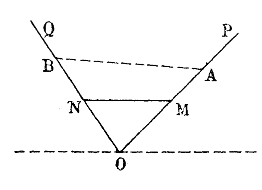
1. On lance d'un même point, au même instant, avec la vitesse v_0, des mobiles pesants dans toutes les directions. Lieu des positions de tous ces mobiles à l'instant t. — Variations du lieu avec t.

2. Un obus lancé sous un angle donné α fait explosion et l'on entend le bruit de l'explosion t secondes après ; trouver la vitesse initiale et la distance.

3. On lance au même instant deux projectiles de deux points O et O′ situés sur une horizontale, à la distance d ; trouver la condition pour qu'ils se rencontrent.

4. Avec quelle vitesse faut-il lancer un projectile sous l'angle α, pour qu'il atteigne une distance d ?

5. Deux mobiles M et N soumis à la seule action de la pesanteur descendent le long de deux plans inclinés OP et OQ faisant les angles α et β avec l'horizon. Ils partent sans vitesses initiales l'un de A, l'autre de B, pris sur OP et sur OQ. On donne $OA = a$ et $OB = b$. Calculer au bout de combien de temps la droite MN qui joint les deux mobiles est horizontale. Donner les conditions de possibilité du problème.



Application numérique sans faire usage des logarithmes :

$$\alpha = 60°, \qquad \beta = 30°, \qquad a = 40^m, \qquad b = 10^m.$$

On adoptera pour la mesure de l'accélération due à la pesanteur $g = 9^m,81$.

Les angles α et β n'étant plus donnés, mais connaissant seulement l'angle φ des deux plans inclinés, déterminer α et β par la condition que les deux mobiles partis de A et de B sans vitesse initiale arrivent ensemble en O.

6. On considère deux plans inclinés qui se coupent suivant une horizontale ; on laisse tomber en même temps trois mobiles sur les deux plans et sur la verticale. Déterminer les côtés et les angles du

triangle déterminé à chaque instant par les trois mobiles, et montrer que sa surface est proportionnelle à t^2.

7. Deux mobiles placés sur deux plans inclinés adossés l'un à l'autre sont reliés par un cordon de longueur donnée qui passe sur une poulie. Etudier les mouvements de ces deux mobiles connaissant leurs poids P et Q.

8. Mouvement du centre de gravité des deux mobiles de l'exercice précédent.

9. Étant donnés deux points A et B, trouver un point O tel que les temps de chute d'un mobile suivant AO et BO soient égaux.

10. D'un point donné et suivant des droites issues de ce point on laisse tomber des mobiles sans vitesse initiale. Trouver le lieu de ceux de ces mobiles qui rencontrent un plan donné à l'instant t et la manière dont ce lieu varie avec le temps t.

11. Un fil qui s'enroule sur une poulie très mobile porte à chacune de ses extrémités A, B un poids de 200 gr. Au poids suspendu en A, on ajoute une masse additionnelle de 5 gr. et on abandonne le système à l'action de la pesanteur.— Calculer le chemin parcouru par le point A au bout de trois secondes ; calculer, à cet instant, la force vive du système. On négligera la masse du fil et celle de la poulie et l'on prendra $9^m,809$ pour l'accélération due à la pesanteur.

12. Un cordon passe sans frottement sur une poulie fixe et est sollicité par deux poids $P+p$ et Q tels que $P+p > Q > P$.

1° Étudier le lieu et le mouvement du centre de gravité.

2° Après θ secondes on supprime le poids p et l'on demande d'étudier le mouvement qui se produit ensuite.

13. Une arme à feu horizontale de $1^m,20$ contient une balle de 25 gr. lancée avec une vitesse de 400^m. Trouver la force de la poudre, en la supposant constante pendant que le projectile reste dans le canon et en supposant connue la durée de l'action de la poudre.

14. Un corps de poids P, mobile sur une droite horizontale, reçoit une impulsion d'une force horizontale qui lui imprime une vitesse v_0 ; il s'arrête au bout du temps t après avoir parcouru un espace e ; trouver le coefficient de frottement.

15. Dans le pendule à petites oscillations, comparer le mouvement sur la corde et sur l'arc au point de vue de la vitesse et du temps.

LIVRE II

CINÉMATIQUE

LIVRE III

DYNAMIQUE

IMPRIMERIE COMTE-JACQUET, A BAR-LE-DUC